پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله

پژوهشکده زلزله‌شناسی

ارائه‌ی یک روش جدید در حل معکوس مسئله‌ی لغزش صفحه گسل با رویکرد کاهش بعد فضای مدل

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته ژئوفیزیک
گرایش زلزله‌شناسی

نوید خیردست

استاد راهنما

دکتر انوشیروان انصاری

استاد مشاور

دکتر احسان کرکوتی

۱۴۰۰

بسم الله الرحمن الرحیم

پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله

(رساله دکترا)

عنوان

ارائه یک روش جدید در حل معکوس مسئله لغزش صفحه گسل با رویکرد کاهش بعد فضای مدل

توسط

نوید خیردست

این رساله به‌عنوان بخشی از فعالیت‌های علمی مندرج در ضوابط دوره‌های تحصیلات تکمیلی در پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، جهت دریافت درجه **دکترای تخصصی (Ph.D)** رشته ژئوفیزیک- زلزله‌شناسی درتاریخ ۱۴۰۰/۰۷/۰۳ ارائه شده است.

امضاء کنندگان زیر، متن رساله حاضر را مطالعه نموده و آن را بر طبق ضوابط تحصیلات تکمیلی پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، برای دریافت **دکترای تخصصی** با درجه عالی مورد تائید قرار داده‌اند.

ردیف	مشخصات هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	دانشگاه یا موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما	آقای دکتر انوشیروان انصاری	دانشیار	پژوهشگاه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله	۱۴۰۰/۷/۳
۲	استاد داور مشاور	آقای دکتر احسان کرکوتی	استادیار	پژوهشگاه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله	
۳	استاد داور خارجی	آقای دکتر ناصر خاجی	استاد	تربیت مدرس	۱۴۰۰/۷/۳
۴	استاد داور خارجی	آقای دکتر علی غلامی	استاد	موسسه ژئوفیزیک	
۵	استاد داور داخلی	آقای دکتر حمید زعفرانی	استاد	پژوهشگاه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله	۱۴۰۰/۷/۳
۶	استاد داور داخلی	آقای دکتر محمدرضا قائمقامیان	استاد	پژوهشگاه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله	
	نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر حمید زعفرانی	استاد	پژوهشگاه بین‌المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله	۱۴۰۰/۷/۳

مدیر تحصیلات تکمیلی

تأییدیه‌ی صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب نوید خیردست به شماره دانشجویی ۹۳۳۶۰۲۴ دانشجوی رشته ژئوفیزیک مقطع تحصیلی دکتری تأیید می‌نمایم که کلیه‌ی نتایج این رساله حاصل کار اینجانب و بدون هرگونه دخل و تصرف است و موارد نسخه‌برداری‌شده از آثار دیگران را با ذکر کامل مشخصات منبع ذکر کرده‌ام. درصورت اثبات خلاف مندرجات فوق، به تشخیص دانشگاه مطابق با ضوابط و مقررات حاکم (قانون حمایت از حقوق مؤلفان و مصنفان و قانون ترجمه و تکثیر کتب و نشریات و آثار صوتی، ضوابط و مقررات آموزشی، پژوهشی و انضباطی ...) با اینجانب رفتار خواهد شد.

این رساله در چارچوب طرح پژوهشی با عنوان ارائه‌ی یک روش جدید در حل معکوس مسئله‌ی لغزش صفحه گسل با رویکرد کاهش بعد فضای مدل تعریف و انجام شده است. مالکیت معنوی این اثر متعلق به پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله می باشد.

نام و نام خانوادگی: نوید خیردست

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر انوشیروان انصاری

تاریخ:

امضا:

تقدیم به:

زلزله‌زدگان سرپل‌ذهاب

قدردانی

در پایان یکی از بهترین دوره‌های زندگی، بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در تمامی مراحل از من حمایت کرده‌اند و امکانات لازم را برای رشد و شکوفایی در اختیار من قرار داده‌اند تشکر کنم. تشکر ویژه از پدر بزرگوار و مادر عزیزم دارم که با همراهی و کمک‌های همه‌جانبه‌شان، طی کردن این مسیر را برایم آسان نمودند.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر **انوشیروان انصاری** به شکلی ویژه تشکر می‌کنم. نقش ایشان در به ثمر رساندن این رساله فراتر از حمایت‌های علمی است. به غیر از نکات فراوانی که در کلاس‌ها و جلسات مختلف از ایشان آموختم، همواره لطف ایشان شامل حال من بود و مرا تشویق می‌کردند و به من دلگرمی می‌دادند که با تلاش همه چیز ممکن است.

همچنین از کمک‌های خانم دکتر سوزانا کوشتودیو[1] که در مرحله‌ی فرصت مطالعاتی به پیشبرد این رساله کمک نمودند تشکر می‌کنم.

در مراحل پژوهش و تدوین این رساله از همفکری و مشورت دوستان عزیز بهره برده‌ام، در این میان از دکتر احسان کرکوتی، دکتر لیلا اعتماد سعید، دکتر عرفان فیروزی، دکتر سعید سلطانی مقدم، دکتر مجتبی ناموران، دکتر میثم محمودآبادی، دکتر احسان مرادیان، دکتر رامین موقری، مهندس راحله شیریزدی، مهندس حامد داوری و مهندس سعید سلطانی تشکر ویژه‌ای دارم.

نوید خیردست

۱۴۰۰

[1] Susana Custódio

چکیده

حل معکوس سینماتیکی زمین‌لرزه‌ها به منظور شناسایی پیچیدگی‌های رُخداد زمین‌لرزه نظیر چگونگی آغاز فرآیند شکست، نحوه‌ی رشد و انتشار شکستگی و توقف آن انجام می‌شود. در تعیین تابع چشمه، از روی داده‌های لرزه‌ای ثبت شده بر مبنای نظریه‌ی حل معکوس، به دلیل آنکه رابطه‌ی مستقیم بین نرخ لغزش بر روی گسل و داده‌های لرزه‌ای – بر مبنای قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی– از نظر ریاضی یک انتگرال فردهلم نوع ۱ است، با مسئله‌ای بد وضع مواجه هستیم. از سوی دیگر، به دلیل کمبود داده و تعداد زیاد پارامتر، با مسئله‌ای فرومعیّن سر و کار داریم. این شرایط موجب می‌شود که مقادیر تکین کوچک در مسئله موجب بزرگنمایی نوفه در فضای مدل شوند. حل چنین مسئله‌ی معکوسی پیچیده است و باید به شیوه‌ای مناسب اثر ناپایدار کننده‌ی مقادیر تکین کوچک را در آن کنترل نمود. در این رساله، با استفاده از توابع پایه‌ی فازی و تقریب تطبیقی لغزش بر روی چشمه‌ی لرزه‌زا، تعداد پارامترهای دخیل در حل معکوس کاهش داده شده است و به تبع آن از تعداد مقادیر تکین کوچک در مسئله کاسته شده است. روش پیشنهادی با استفاده از تکنیک منظم‌سازی تیخونوف، مقید شده است. با چنین روشی میزان عدم قطعیت کاهش یافته و به حل پایدارتری نسبت به روشهای موجود می‌رسیم. در این رساله از تقریب تابعی توسط شبکه‌ی عصبی انفیس استفاده می‌کنیم و بهبود وضعیت مسئله را که در روش جدید به دست می‌آید، مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای انتخاب تعداد مناسب توابع پایه‌ی فازی از روشی مبتنی بر تحلیل بیشینه‌ی درست‌نمایی استفاده شده است. روش پیشنهادی بر روی مسئله‌ی سینتتیک SIV-inv1 مورد آزمایش قرار گرفته است. همچنین عملکرد این روش را در شرایط واقعی، با استفاده از داده‌های زمین‌لرزه ۲۴ آگوست ۲۰۱۶ آماتریچه با بزرگای گشتاوری ۶٫۲ مورد بررسی قرار داده‌ایم.داده‌های ثبت شده شامل تغییر شکل استاتیکی و نرخ بالای GNSS، جهت حل معکوس در فرکانس‌های پایین ($f <= 0{,}06\mathrm{Hz}$) و داده‌های جنبش نیرومند زمین، جهت حل معکوس در فرکانس‌های بالا می‌شود ($f > 0{,}06\mathrm{Hz}$). نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی این رساله با نتایج به دست آمده توسط سایر محققین مقایسه شده و مورد بحث قرار خواهد گرفت.

واژگان کلیدی: حل معکوس، چشمه‌ی لرزه‌زا، نوروفازی، مسائل بدوضع، منظم‌سازی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه

بر اساس نظریه‌ی تکتونیک صفحات[۱] پوسته‌ی زمین از قطعات مختلفی که در حال حرکت هستند تشکیل شده است. حرکت نسبی این صفحات سبب تجمع تنش در نواحی مرزی یا درونی آنها شده و هنگامیکه این تنش از آستانه‌ی تحمل سنگ فراتر برود، پدیده‌ی شکست[۲] خود به خودی رخ می‌دهد. زمین‌لرزه، ارتعاش زمین در اثر انتشار امواج ناشی از این شکستگی در پوسته جامد زمین است. انتشار امواج در اثر تغییر شکل ارتجاعی محیط لرزه‌زا، که تمایل به بازگشت به شکل اولیه پیش از تغییر شکل را دارد، روی می دهد. این توصیف از رُخداد زمین‌لرزه‌ها اولین بار توسط رِید [۱۹۱۰] در مورد زمین‌لرزه‌ی ۱۹۰۶ سانفرانسیسکو، تحت عنوان نظریه‌ی بازگشت الاستیک[۳] مطرح شد.

در لایه‌های بسیار سطحی زمین، مثل لایه‌های آبرفتی، که در اثر خرد شدن سنگها پدید آمده‌اند، چنین رفتاری که موجب شکست پوسته شود، وجود ندارد. کمی پایین‌تر، هنگامیکه به لایه‌های سنگی می‌رسیم، محیط جامد لیتوسفر[۴] زمین قابلیت تحمل تنش را پیدا می‌کند و هرچه پایین‌تر می‌رویم، به دلیل افزایش تنش قائم، قابلیت تحمل تنش‌های جانبی در سنگ‌ها بیشتر می‌شود. علاوه بر این عموماً مقاومت سنگهایی که در لایه‌های عمیق‌تر قرار گرفته‌اند بیشتر از سنگها در لایه‌های سطحی است و شکستگی در آنها، در سطح تنش‌های بالاتری روی می‌دهد.

با وجود اینکه افزایش عمق موجب افزایش تنش‌های قائم شده و همچنین مقاومت سنگ‌ها در اعماق زیاد بیشتر می‌شود، اما افزایش دما از افزایش مقاومت سنگ‌ها در لایه‌های پایین‌تر جلوگیری می‌کند، چنانکه با ازدیاد

[1] Plate tectonics theory
[2] Fracture
[3] Elastic rebound theory
[4] Lithosphere

دما تغییر شکل سنگها در اثر نیروهای تکتونیکی به صورت خمیری بوده و در آنها تنش ذخیره نمی‌گردد، بنابراین رفتار شکننده سنگ‌ها از بین رفته و نمی‌توانند عامل وقوع زمین‌لرزه باشند.

بر اساس توصیف فوق، محیطی که قابلیت ایجاد زمین‌لرزه را دارد، لایه‌ای نازک، با عمق حدوداً ۵ تا ۵۰ کیلومتر - نسبت به شعاع زمین که حدوداً ۶۳۷۱ کیلومتر است - و طویل، در راستای سطح زمین است که به آن پوسته‌ی لرزه‌زا[۵] گفته می‌شود. در نواحی فرورانشی به دلیل هندسه‌ی متفاوت برخورد تکتونیکی، استثنائاً امکان وقوع زمین‌لرزه‌ها در اعماق بیشتر وجود دارد.

۱-۱ مدل‌سازی زمین‌لرزه‌ها

خطر وقوع زمین‌لرزه‌ای مهیب و وارد آمدن آسیب شدید به زیرساخت‌ها و از دست رفتن جان انسان‌ها، در شهرهای واقع در مجاورت گسل‌های فعّال و با سابقه در ایجاد زمین‌لرزه، همواره وجود دارد. جلوگیری از این پدیده‌ی طبیعی، لاأقل با دانش و امکانات امروز، امکان‌پذیر نیست. تا کنون امکانی برای پیش‌بینی قابل اعتماد زمین‌لرزه هم به وجود نیامده است و پژوهش‌ها در این زمینه ادامه دارد. با این وجود، حدود محتمل خطر، با استفاده از روش‌های مدل‌سازی قابل تعیین است و لازم است که برای برنامه‌ریزی‌های آینده، میزان خطر زمین‌لرزه برآورد شود.

برای مدلسازی پدیده‌ی زمین‌لرزه می‌توان با استفاده از اصول علم مکانیک جامدات، چشمه‌ی لرزه‌زا را مورد مطالعه قرار داد. روش‌های مکانیکی مطالعه‌ی چشمه لرزه‌زا خود به دو بخش تقسیم می‌شوند: سینماتیک چشمه و دینامیک چشمه. سینماتیک دانشی است که تغییر مکان زمین، در اثر لغزش بر روی چشمه لرزه‌زا را بدون در نظر گرفتن علل شکست گسل مطالعه می‌کند. در مقابل، دینامیک دانشی است که تغییر مکان بر روی چشمه‌ی لرزه‌زا را با در نظر گرفتن نیروها و اصطکاک بین سنگ‌ها از منظر علوم مکانیک شکست و مکانیک تماس بررسی می‌کند.

در سالیان گذشته، پژوهش‌های اساسی در راستای شبیه‌سازی هرچه دقیق‌تر پدیده‌ی دینامیکی شکست پوسته‌ی زمین، انتشار امواج تنشی ناشی از آن در محیط پوسته، تشدید دامنه‌ی امواج توسط ساختگاه آبرفتی و تحلیل دقیق رفتار سازه‌ها در مقابل حرکات زمین صورت گرفته است. همچنین با پیشرفت روش‌های توموگرافی، اطلاعات قابل اعتمادی از ناهمسانی[۶] و ناهمسانگردی[۷] محیط انتشار به دست آمده است. پدیده‌ی شکست گسل، با توسعه‌ی دانش

[5] Seismogenic crust
[6] Heterogeneity
[7] Anisotropy

مکانیک شکست اجسام تُرد - عموماً با فرض شکست در جامد الاستیک خطی - قابلیت مدلسازی دارد [برای مثال ایدا، ۱۹۷۲] و از آن تحت عنوان مسئله‌ی شکست خود به خودی[8] نام برده می‌شود. روش‌های عددی بسیاری نیز برای شبیه‌سازی این پدیده توسعه داده شده‌اند [همچون دِی و همکاران، ۲۰۰۵؛ کانِکو و همکاران، ۲۰۰۸؛ آمپوئِرو، ۲۰۱۲؛ کازِر و همکاران، ۲۰۱۰؛ دورو و همکاران، ۲۰۱۴؛ پریموس و همکاران، ۲۰۲۰]. گام‌های مهمی نیز در راستای مدل‌سازی انتشار امواج ناشی از این شکست برداشته شده است. این روش‌ها قابلیت در نظر گرفتن پیچیدگی‌های محیط واقعی همچون ناهمسانی و توپوگرافی را نیز پیدا کرده‌اند.

در مدل‌سازی مذکور فرض می‌گردد که محیط پوسته‌ی زمین یک محیط پیوسته است به نحوی که میدان‌های تغییر مکان $(\mathbf{u})$ و تنش (σ) در آن به کمک توابعی پیوسته توصیف می‌شوند. اما، نکته مهم اینجاست که به علت وقوع شکستگی بر روی گسل، تغییر مکان فقط بر روی گسل پیوسته نیست، حال آنکه تنش، به علت تماس بین دو سطح گسل، پیوسته فرض می‌شود [برای مثال کاستروف و داس، ۱۹۸۸].

علیرغم توسعه‌ی روش‌های شبیه‌سازی زمین‌لرزه‌ها، هنوز اطلاعات کافی از شرایط واقعی که پوسته‌ی زمین تحت آن شرایط می‌شکند و به زمین‌لرزه منجر می‌شود در اختیار نداریم. این اطلاعات شامل شرایط آغاز شکست، میزان تنش لازم برای شروع گسیختگی، سطح تنش مقاوم در سنگ پیش از آغاز شکست، میزان گسترش لغزش بر روی گسل، محدوده‌ی لغزش، لغزشِ بیشینه و فاز نهایی ایستادنِ شکست می‌شود. در سالیان اخیر، مطالعات آزمایشگاهی جهت پی بردن به پیچیدگی‌های فرآیند شکست صورت گرفته و کماکان ادامه دارد [برای مثال وَندن اِنده و همکاران، ۲۰۲۰].

رفتار دینامیکی گسل رفتاری پیچیده است. نقاط واقع بر روی یک گسل، به طور یکسان در تحمل تنش مشارکت نمی‌کنند و شواهدی مبنی بر تصادفی بودن توزیع تنش بر روی گسل وجود دارد [مای و بِروزا، ۲۰۰۲]. از دیگر سو، طبیعتِ نیروی اصطکاک بین دو وجه متقابل گسل پیچیده و ناشناخته است.

تنش آزاد شده بر روی گسل با تغییر شکلهای فرکانس بالا در ارتباط است. در فرکانسهای بالا، امواج دارای طول موج کوتاه هستند و به ساختارهای محلی حساسند. بنابراین برای مدل‌سازی امواج فرکانس بالا، به شناسایی دقیق محیط انتشار موج نیز نیازمندیم. با وجود این محدودیت‌ها، حل‌های دینامیکی بسیار رو به رشد هستند و اخیراً [گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b] با استفاده از روش حل معکوس بیزی[9]، حل دینامیکی برای زلزله آماتریچه[10] ارائه داده‌اند و در آن تصویری از افت تنش بر روی گسل نیز ارائه شده است. در فصل ۶ تابع چشمه‌ی زمین‌لرزه‌ی

[8] Spontaneous Rupture Problem
[9] Bayesian inversion
[10] 24 Aug. 2016, Mw 6.2, Amatrice

مذکور را با استفاده از روش پیشنهادی این رساله به دست آورده و نتایج گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] را با آن مقایسه می‌کنیم.

۱-۲ قضیه معرّف زلزله‌شناسی

با توجه با ناشناخته بودن عوامل وقوع شکست خود به خودی، پژوهشگران شکل ساده‌تری از رابطه‌ی میان لغزش (یا نابجایی[۱۱]) بر روی سطح گسل و تغییر مکان سطح زمین را با استفاده از نظریه‌ی ارتجاعی توسعه دادند. این رابطه که قضیه‌ی معّرف زلزله‌شناسی نامیده می‌شود، در این بخش معرفی می‌گردد. نابجایی یک تابع برداری است که شکستگی گسل را نمایندگی می‌کند. چنانچه مقدار نابجایی را برابر با حدِ رابطه‌ی ۱-۱ تعریف کنیم، که در آن $\boldsymbol{\xi}$، بردار مکان گسل را نشان دهد:

$$\Delta u_i^f(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{x \to \boldsymbol{\xi}^+} u_i(x) - \lim_{x \to \boldsymbol{\xi}^-} u_i(x) \qquad (۱-۱)$$

در صورت پیوسته بودن میدان جابجایی، $u_i(x)$، مقدار حدِ رابطه‌ی فوق برابر صفر خواهد شد. اما، در صورت وجود شکستگی در محیط و ناپیوستگی میدان تغییرِ مکان، مقدار حدِ رابطه‌ی ۱-۱ برابر با صفر نشده و میزانِ شکستگی در محیط را نشان خواهد داد. در حالت کلی، نابجایی تابعی از مکان و زمان می‌باشد و با تعیین آن می‌توانیم توصیف کاملی از شکستگی در زمان‌های مختلف و برای تمامی نقاط واقع بر روی سطح گسل ارائه نمائیم. همچون تغییر مکان، $u_i(\mathbf{x}, t)$، نابجایی $\Delta u_i^f(\boldsymbol{\xi}, t)$ یک میدانِ برداری[۱۲] بوده و دارای سه مؤلفه‌ی مستقل می‌باشد.

در توصیف فوق، به دلایل وقوع لغزش پرداخته نمی‌شود: فرض می‌کنیم که به هر دلیلی لغزشی بر روی گسل روی داده است و جابجایی ناشی از این لغزش را در سطح زمین محاسبه می‌کنیم. در توصیف اخیر، چون عوامل و نیروهای دخیل در فرآیند شکست گسل در نظر گرفته نمی‌شوند، به آن توصیف سینماتیکی[۱۳] گفته می‌شود.

قضیه معرّف زلزله‌شناسی[۱۴] (رابطه‌ی ۱-۲) [آکی و ریچاردز، ۲۰۰۲]، یک انتگرال پیچش[۱۵] بین تابع برداری

[۱۱] به لغزش نسبی طرفین گسل اطلاق می‌شود، به آن دَررَفتگی هم می‌گویند و معادل لغت انگلیسی dislocation است.

[12] Vector field

[13] Kinematic

[14] Seismic Representation Theorem

[15] Convolution

نابجایی، $\Delta u_i^f(\boldsymbol{\xi},\tau)$ تعریف شده بر روی سطح گسل Γ، و مشتق مکانی تابع گرین محیط، $\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},\circ)$، است و به کمک آن می‌توان انتشار امواج لرزه‌ای ناشی از شکستگی پوسته زمین را مدل‌سازی کرد. این قضیه یک گام اساسی در جهت مدل‌سازی پدیده‌ی زمین‌لرزه است.

$$u_n^o(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int_{\Gamma}\Delta u_i^f(\boldsymbol{\xi},\tau)c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},\circ)d\Gamma \qquad (۱-۲)$$

با توجه به اینکه قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی یک انتگرال پیچش است، دارای خاصیت جابجایی پذیری[۱۶] می‌باشد. از این رو می‌توان قضیه‌ی معرّف را از فرم رابطه‌ی ۱-۲، با تغییر آرگومان زمانی تابع گرین (G_{np}) از $t-\tau$ به τ و آرگومان زمانی تابع چشمه Δu_i^f از τ به $t-\tau$ به صورت (رابطه‌ی ۱-۳) نوشت:

$$u_n^o(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int_{\Gamma}\Delta u_i^f(\boldsymbol{\xi},t-\tau)c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},\tau;\boldsymbol{\xi},\circ)d\Gamma \qquad (۱-۳)$$

چنانچه در (رابطه‌ی ۱-۳) به جای نابجایی، نرخ تغییرات زمانی ناب‌جایی $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Delta u_i^f(\boldsymbol{\xi},t)$ را با تابع گرین پیچش کنیم، نتیجه‌ی آن سرعت تغییر مکان زمین $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}u_n^o(\mathbf{x},t)$ خواهد شد.

$$\dot{u}_n^o(\mathbf{x},t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int_{\Gamma}\Delta\dot{u}_i^f(\boldsymbol{\xi},t-\tau)c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},\tau;\boldsymbol{\xi},\circ)d\Gamma \qquad (۱-۴)$$

بنابراین همان تابع گرینی که نابجایی گسل را به جابجایی سطح زمین تبدیل می‌کند، می‌تواند نرخ لغزش را هم به سرعت روی سطح زمین تبدیل نماید. دلیل تغییر متغیر بالا این بود که فقط نابجایی $\Delta\dot{u}_i^f$ دارای متغیر زمانی t باشد و مشتق‌گیری نسبت به t، اثری بر تابع گرین (G_{np}) نگذارد. در مسائل حل معکوس سینماتیکی چشمه‌ی لرزه‌زا استفاده از فرم اخیر قضیه‌ی معرّف (رابطه‌ی ۱-۴)، که بر اساس نرخ لغزش، و نه لغزش، نوشته شده است مرسوم‌تر است، چرا که تابع نرخ لغزش، تابعی محمل فشرده[۱۷] است که نشان می‌دهد گسیختگی در یک زمان بخصوص به یک نقطه‌ی خاص گسل می‌رسد و طرفین گسل (فرادیواره نسبت به فرودیواره) با یک سرعت نسبی حرکت می‌کنند و سپس می‌ایستند و سرعت لغزش مجدداً به صفر می‌رسد. توصیف فوق از رابطه‌ی ۱-۴ را برای مثال معیار SIV-inv1 در شکل ۱-۱ نمایش داده‌ایم. تابع لغزش و تغییرمکان سطح زمین در این مثال از شبیه‌سازی

[16] Commutative

[17] Compacted support

عددی شکست خود به خودی به دست آمده است و از نظری فیزیکی با یکدیگر سازگار می‌باشند. شکل ۱-۱ (الف) نمایش دهنده‌ی $\dot{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, t)$ در لحظات مختلف گسیختگی $(t = ۰, \cdots, ۸\ sec)$ است، تابع نرخ لغزش برای یک نقطه‌ی خاص بر روی گسل با رنگ قرمز ترسیم شده است. در شکل۱-۱ (ب) سرعت تغییر مکان سطحِ زمین در یک ایستگاه خاص روی ترسیم گردیده است.

با استفاده از تبدیل فوریه، عملگر کانولوشن در رابطه‌ی ۱-۴ به یک ضرب ساده تبدیل می‌شود (رابطه‌ی ۱-۵).

$$\bar{u}_n^o(\mathbf{x}, \omega) = \int_\Gamma \Delta\bar{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, \omega) c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np}(\mathbf{x}, \omega; \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \qquad (۱-۵)$$

که در آن $\bar{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, \omega)$، تبدیل فوریه‌ی $\Delta\dot{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ و $\bar{u}_n^o(\mathbf{x}, \omega)$ تبدیل فوریه‌ی $\dot{u}_n^o(\mathbf{x}, t)$ می‌باشد. در رابطه‌ی ۱-۵ $\Delta\bar{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, \omega)$ طیف تابع نرخ لغزش است، دقت کنید که شرط وجود تبدیل فوریه برای یک تابع این است که تابع مورد نظر دارای محمل فشرده باشد. با توجه به اینکه تابع لغزش، محمل فشرده نیست، قضیه‌ی معرّف در فرم فرکانسی فقط برای نرخ لغزش و مشتقات زمانی مرتبه بالاتر آن وجود دارد. در رابطه‌ی فوق ω نشان‌دهنده‌ی فرکانس زاویه‌ای[18] است. بر اساس رابطه‌ی ۱-۵، داده‌های مشاهداتی $\dot{u}_n^o(\mathbf{x}, t)$، تنها به طیف نرخ لغزش در همان فرکانس ω، $\bar{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, \omega)$ مربوط می‌باشند. قضیه‌ی معرف در حوزه‌ی فرکانسی، در شکل ۱-۲ نمایش داده شده است، که بر اساس آن تابع لغزش در هر فرکانس (شکل ۱-۲الف) با طیف رکورد مشاهداتی در فرکانس‌های متناظر (شکل ۱-۲ب) نشان داده شده‌اند. طیف تابع نرخ لغزش برای یکی از نقاط بر روی گسل و طیف رکورد مشاهداتی برای یکی از ایستگاه‌ها در شکل ۱-۲ به نمایش درآمده است.

بر اساس قضیه‌ی معرّف و مفهوم نابجایی، بوریج و نوپوف [۱۹۶۴] مفهوم گشتاور لرزه‌ای را ارائه کردند. گشتاور لرزه‌ای نیرویی حجمی است که اثری معادل با نابجایی در یک محیط الاستیک دارد. گشتاور یا ممان لرزه‌ای[19] بر اساس قضیه‌ی معرّف تعریف می‌شود و از حاصل‌ضرب نابجایی، $\Delta u_i^f(\xi, \tau)$، تانسور کشسانی[20] c_{ijpq}، و بردار نرمال بر سطح ناپیوستگی ν_j به دست می‌آید. به عبارت دیگر، تانسور ممان[21] برابر با (رابطه‌ی ۱-۶) است.

$$M_{pq}(\xi, \tau) = \Delta u_i^f(\xi, \tau) c_{ijpq} \nu_j \qquad (۱-۶)$$

[18] Angular frequency
[19] Seismic moment
[20] Elasticity tensor
[21] Moment tensor

این تانسور دارای ۹ مؤلفه می‌باشد. با تقارن $c_{ijqp} = c_{ijpq}$، که به دلیل تقارن در تانسور کرنش[۲۲] $(E_{pq} = E_{qp})$ می‌باشد، تقارن $M_{qp} = M_{pq}$ در تانسور ممان لرزه‌ای برقرار است. از این رو، تعداد مولفه‌های مستقل تانسور ممان لرزه‌ای برابر با ۶ می‌باشد. از آنجا که ممان لرزه‌ای دارای رابطه‌ی مستقیم با بردار نابجایی می‌باشد، در نقاطی از محیط پوسته که شکستگی (ناپیوستگی) وجود ندارد، مقدار ممان برابر صفر می‌باشد. نکات مهم در محاسبات ممان لرزه‌ای، به همراه دستگاه مختصات مرسوم جهت تعریف ممان لرزه‌ای، در ضمیمه‌ی ب معرفی شده‌اند.

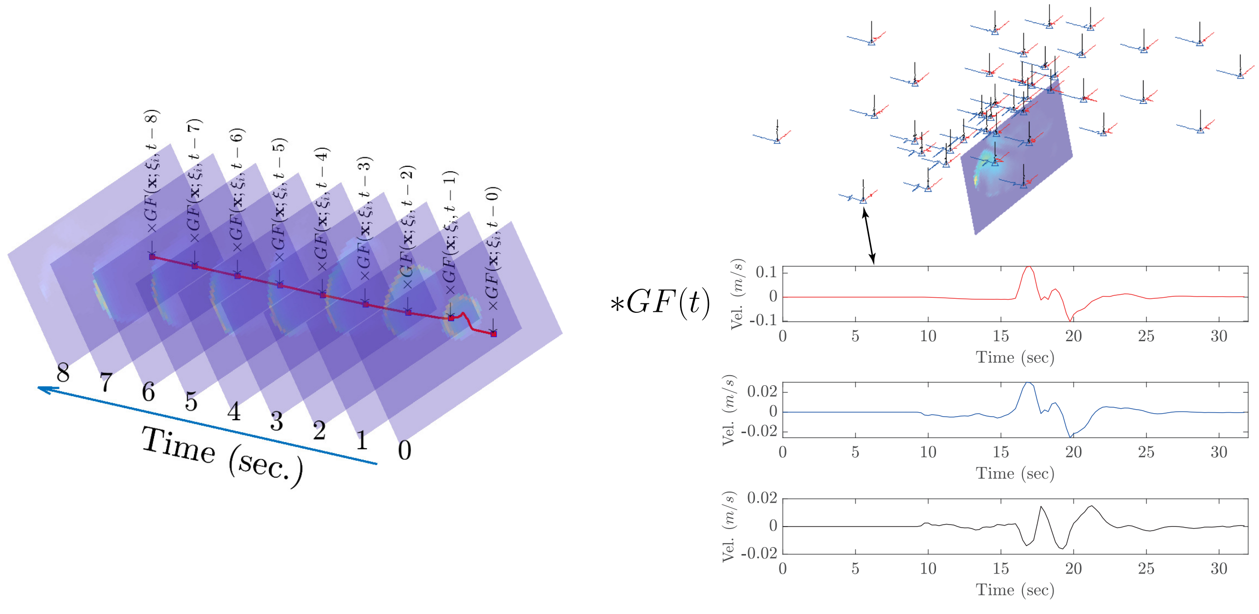
با تعریف ۱-۶ می‌توان قضیه معرّف را به صورت انتگرال پیچش بین تانسور ممان، M_{pq} و مشتق مکانی تابع گرین، $\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}$ بازنویسی کرد.

$$u_n^o(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_\Gamma M_{pq}(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},t-\tau;\xi,0)d\Gamma \qquad (۱-۷)$$

بر اساس (رابطه‌ی ۱-۷) می‌توانیم مشتق مکانی تابع گرین، $\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},t-\tau;\xi,0)$ را به عنوان پاسخ محیط به ممان واحد تعبیر کرد. همانند رابطه‌ی ۱-۵ با استفاده از تبدیل فوریه می‌توان انتگرال فوق را مطابق (رابطه‌ی ۱-۸) به حوزه‌ی فرکانسی منتقل کرد.

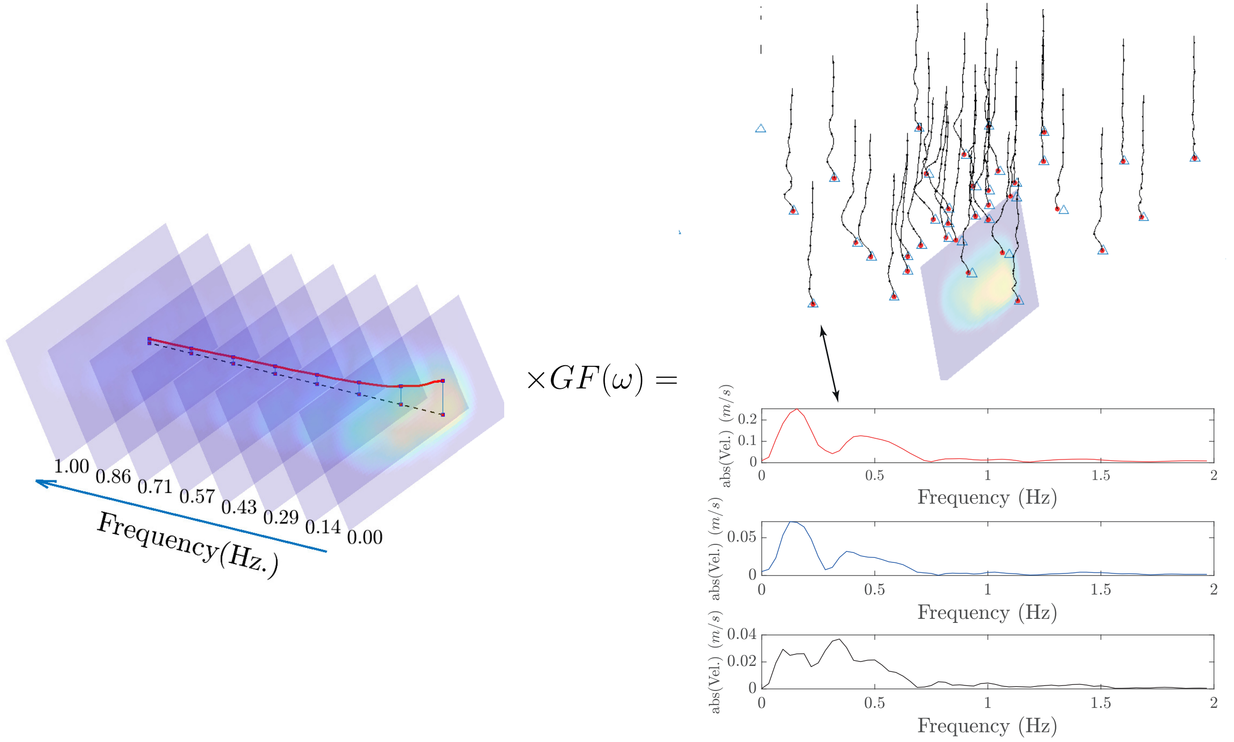
$$u_n^o(\mathbf{x},\omega) = \int_\Gamma M_{pq}(\xi,\omega)\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},\omega;\xi)d\Gamma \qquad (۱-۸)$$

[22] Strain tensor



(الف) (ب)

شکل ۱-۱: قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی در حوزه‌ی زمان (رابطه‌ی ۱-۴)، (الف) فضای مدل در حل گسل‌های محدود: یک فضای سه بعدی دارای یک بُعد زمانی و دو بُعد مکانی، در صورتیکه فرض شود هندسه‌ی گسل معادل یک صفحه‌ی دوبُعدی است. نرخ لغزش برای زمان‌های متوالی $(t = ۰, \cdots, ۸\ sec)$ برای یک نقطه با رنگ قرمز ترسیم شده است. (ب) سرعت تغییر مکان سه مؤلفه‌ای سطح زمین در هر ایستگاه در نتیجه‌ی پیچش تابع نرخ لغزش بر روی گسل با تابع گرین. دراین شکل، تابع چشمه و سرعت تغییر مکان سطح زمین از مثال معیار SIV-inv1 [مای و همکاران، ۲۰۱۶] ذکر شده است. توجه شود که عموماً تعداد نقاط واقع شده بر سطح گسل که در آن تغییرات زمانی تابع چشمه مجهول است، از تعداد نقاط واقع بر سطح زمین که داده‌ها را ثبت کرده‌اند بیشتر است و ما با یک مسئله‌ی فرومعیّن (بخش ۲-۲) روبرو هستیم.



(الف) (ب)

شکل ۱-۲: قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی در حوزه‌ی فرکانسی (رابطه‌ی ۱-۵). (الف) فضایِ مدل حل معکوس گسل‌های محدود، توجه کنید که محور زمان در شکل ۱-۱ در این شکل با فرکانس جایگزین شده است. طیف دامنه‌ی لغزش برای یک نقطه‌ی مفروض بر روی گسل در فرکانس‌های متوالی $(f = 0, \cdots, 1\ Hz)$ با رنگ قرمز ترسیم شده است. (ب) طیف سرعت در یکی از ایستگاه‌های واقع بر سطح زمین که از حاصل‌ضرب تابع چشمه و تابع گرین و انتگرال‌گیری از آن بر روی سطح گسل در فضای فرکانسی به دست می‌آید. تابع چشمه و طیف سرعت سطح زمین از مثال معیارِ SIV-inv1 [مای و همکاران، ۲۰۱۶] برداشته شده است.

۱-۳ مدل‌سازی معکوس شکست زمین‌لرزه

در روش‌های حل معکوس، فرآیند مدلسازی به صورت برعکس انجام می‌شود. یعنی داده‌های ثبت شده برای تهیه‌ی تصویری از فرآیند لغزش، که نشان دهنده‌ی میزان لغزش در هر زمان و مکان روی گسل می‌باشد، به کار گرفته می‌شوند. این مدل‌سازی می‌تواند پیچیدگی‌های فرآیند شکست را آشکار سازد و به سوالات مهمی در رابطه با زلزله‌های واقعی پاسخ دهد. روش گسل‌های محدود (بخش ۲-۱۰)، روش کلاسیک و استانداردی برای چنین مدل‌سازی است و محققان با استفاده از آن به توزیع لغزش و میزان افت تنش و مقدار متوسط لغزش بر روی یک گسل طی دوره‌های زمانی بین زلزله‌های بزرگ پی برده‌اند. با استفاده از مدل‌های گسل محدود می‌توان روابط پیش‌بینی جنبشِ زمین[۲۳] را توسعه داد. اهمیت این روش در کاهش عدم قطعیت شناختی از پدیده‌ی شکست گسل است و با کمک نتایج آن می‌توان، مدلسازی به مراتب دقیقتری در برآورد مخاطرات زمین‌لرزه داشت.

در این رساله می‌خواهیم با استفاده از مدل‌سازی سینماتیکی لغزش، داده‌های ژئوفیزیکی که تغییر مکان سطح زمین را ثبت کرده‌اند، همچون داده‌های GNSS، InSAR، لرزه‌نگاری، یا شتابنگاری را معکوس کرده و مقدار تابع لغزش را در زمان‌های مختلف و در نقاط مختلف روی گسل به دست بیاوریم. باید توجه کرد که حل معکوس لغزش، مسأله‌ای دشوار است و مشکل اصلی این واقعیت است که انتگرال قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی (رابطه‌ی ۱-۲) یک انتگرال فِردهُلم نوع ۱[۲۴] است و مسئله‌ی معکوسی که بر مبنای آن قرار دارد، ذاتاً بدوضع[۲۵] است. از آنجا که تعداد مشاهدات –داده‌ها– غالباً از تعداد مجهولات –لغزش در مکان و زمان– کمتر است، لذا به دنبال راه حلّی هستیم تا تعداد مجهولات مسأله را کاهش دهیم. به عبارت دیگر روشی را مورد استفاده قرار دهیم که بتواند تابع چشمه را با تعداد پارامترهای کمتری تقریب بزند و از این طریق، از میزان بدوضع بودن مسئله معکوس بکاهیم. برای این منظور از روش تقریب تابعی فازی[۲۶] کمک گرفته‌ایم و با تقریب فوق، رابطه‌ی مستقیم بین پارامترهای مدل و فضای داده‌ها برقرار گردیده است.

در مسائل معکوس که با داده‌های ثبت شده‌ی واقعی سر و کار داریم، داده‌ها لزوماً دارای خطا هستند و این خطا، ذاتِ اندازه‌گیری است و نتایج مدل‌سازی مستقیم هرگز با داده‌های ثبت شده یکسان نمی‌شود. وجود این خطا باعث می‌شود که به مدل درست نرسیم. در مسائل بدوضع این انحراف به شدت زیاد است به نحوی که

[23] GMPE
[24] Fredholm integral of the fisrt kind
[25] ill-posed
[26] Fuzzy Function Approximation

پارامترهایی که از حل معکوس به دست می آیند، به هیچ وجه شباهتی با پارامترهای درست[۲۷] ندارند. دلیل این مشکل بیش‌برازش[۲۸] است، یعنی پارامترهای مدل به نحوی به دست آمده‌اند که تابع ما به نوفه هم برازش شده‌اند و در اثر این بیش‌برازش، مدل به هم می‌ریزد. راه حل درمان این مشکل استفاده از تکنیک منظم سازی[۲۹] است به نحوی که برازش، بسیار زیاد نباشد و مدل نیز به هم ریخته نباشد. در روش حل معکوس ارائه شده در این پایان‌نامه، برای روش تقریب توابع فازی، منظم سازی با استفاده از روش تیخونوف[۳۰] صورت گرفته است.

مطالب ارائه شده در این رساله در ۸ فصل تنظیم شده‌اند و سعی شده است که راه‌حل‌های محققین برای حل معکوس سینماتیکی تا زمان حاضر مرور شده و دستاورد جدید این رساله تشریح و صحت‌سنجی شود. فصل ۲ به تشریح مبانی نظری حل معکوس و مرور ادبیات روش‌های رایج در حل سینماتیکی چشمه‌ی لرزه‌زا می‌پردازد. فصل ۳ به تشریح روش تقریب تابعی فازی با استفاده از شبکه‌ی عصبی ANFIS اختصاص داده شده است. روش پیشنهادی این رساله در فصل ۴ مطرح شده است و برای درک کامل آن، تسلط بر فصل‌های پیشین ضروری است. در فصل ۵ به بحث و بررسی در مورد دستاوردهای نوین روش پیشنهادی و برتری آن نسبت به روش‌های موجود پرداخته‌ایم. در فصل ۶ روش پیشنهادی را برای داده‌های زمین‌لرزه‌ی ۲۰۱۶ آماتریچه به کارگرفته‌ایم و تابع چشمه‌ی آن را تعیین نموده‌ایم. در نهایت، در فصل ۷ به جمع بندی نتایج به دست آمده از روش فوق پرداخته و پیشنهادات خود را برای بهبود نتایج و کارهای آتی مطرح می‌کنیم.

روش پیشنهادی این رساله، به صورت یک نرم‌افزار تدوین شده است و ظرافت‌های پیاده‌سازی آن مورد توجه قرار داشته است. به منظور آشنایی علاقه‌مندان با ظرافت‌های محاسباتی، در ضمائم آ و ب، به ترتیب به تشریح روش کلاسیک انتگرال‌گیری گاوسی و نحوه‌ی محاسبه‌ی مولفه‌های تانسور ممان پرداخته‌ایم.

[27] True
[28] Overfit
[29] Regularization
[30] Tikhonov Regularization

فصل ۲

حل معکوس و فضای مدل

۲-۱ مقدمه

در فصل ۱ با مدل سینماتیکی شکست گسل و ارتباط آن با تغییر مکان سطح زمین، از طریق قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی آشنا شدیم. در رابطه‌ی ۱-۴ دیدیم که نرخ لغزش چشمه‌ی لرزه‌زا ($\Delta\dot{u}_i^f(\boldsymbol{\xi}, t)$)، تابعی از مکان ($\boldsymbol{\xi}$) و زمان ($t$) است که بُعد مکانی آن بر روی محدوده‌ی هندسی گسل و بُعد زمانی آن بر روی محدوده‌ی زمانی شکست تعریف می‌شود.

قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی امکانِ برقراری رابطه‌ای خطی میان لغزش (مجهولات) و تغییر مکان سطح زمین (مشاهدات) را فراهم می‌سازد. در تئوریِ حل معکوس به چنین رابطه‌ای میان مجهولات و مشاهدات رابطه‌ی مستقیم[1] گفته می‌شود. در ادبیات حل معکوس، روابط مستقیم خطی معمولاً به صورت ماتریسی و با $\mathbf{d} = \mathbf{Gm}$، و روابط مستقیم غیرخطی به صورت $\mathbf{d} = G(\mathbf{m})$ نمایش داده می‌شوند که در آن به $\mathbf{m}$ پارامترهای مدل گفته می‌شود و رابطه‌ی مستقیم میان پارامترهای مدل و داده‌ها در حالت خطی توسط ماتریس $\mathbf{G}$ و در حالت غیرخطی توسط علامت $G(\cdot)$ نشان داده می‌شوند. در شیوه‌ی مرسوم حل معکوس خطی، پارامترهای مدل داخل یک بُردار چیده می‌شوند و مجموعه‌ی تمامیِ بردارهای ممکن، **فضای مدل**[2] را تشکیل می‌دهند. فضای مدل در حل سینماتیکی لغزش، مجموعه‌ی تمامی توابعی است که حوزه‌ی تعریف آنها در بُعد مکان، محدوده‌ی هندسی گسل، و در بُعد زمان، محدوده‌ی زمانی گسیختگی را پوشش دهد. حلِ مسئله‌ی معکوس به معنای یافتن یک جواب ($\mathbf{m}_\circ$)

[1] Forward Equation
[2] Model space

از فضای مدل است، به نحوی که داده‌هایی که توسط این بردار تولید می‌شوند، $\mathbf{Gm}_\circ$، دارای انطباق مناسبی با داده‌های مشاهده شده، $\mathbf{d}^o$، باشند. این انطباق، معمولاً توسط نُرمِ دوم خطا ($||\mathbf{d^o} - \mathbf{Gm}_\circ||_۲$) اندازه‌گیری می‌شود.

در مسئله‌ی معکوس، همانند روش‌های تقریب تابعی (بخش ۳-۲)، انطباق بین داده‌های مشاهده شده و تولید شده توسط رابطه‌ی مستقیم، با محاسبه‌ی نُرم خطا ($||\mathbf{d^o} - \mathbf{Gm}_\circ||_۲$) اندازه‌گیری می‌شود. خطای کمتر به معنای انطباق بهتر است و از این روی، مسئله‌ی معکوس هم مانند مسائل تقریبِ تابعی، در حالت کلی یک مسئله یافتن کمینه‌ی خطا است.

امّا این مسأله‌ی یافتن کمینه‌ی خطا به چند دلیل از مسئله‌ی تقریب تابعی دشوارتر است، نخست آنکه داده‌ها در تعداد اندکی از نقاط بر روی سطح زمین برداشته شده است، لیکن تابع چشمه بر روی نقاط زیادی بر روی گسل مورد بررسی است و به این دلیل با یک مسئله‌ی فرومعیّن[۳] مواجهیم (بخش ۲-۲ و شکل‌های ۱-۱ و ۱-۲). دلیل دوم این است که انتگرال قضیه معرّف، یک انتگرال فِردهُلم نوع ۱ است و مسأله معکوسی که بر مبنای آن ساخته می‌شود ذاتاً بدوضع[۴] است، این نکته‌ی مهم به صورت دقیق‌تر در بخش (۲-۴) توضیح داده می‌شود. دلیل سوم وجود نوفه در داده‌های اندازه‌گیری شده است که چنانچه اثر آن کنترل نشود، موجب ناپایداری حل معکوس می‌گردد. دلیل دیگر این است که شناخت و مدل‌سازی ما از محیط انتشار موج دقیق نیست و شبیه‌سازی مستقیم برای طول موج‌های مختلف (معادل با فرکانس‌های مختلف) از دقت‌های متفاوتی برخوردار است.

در این فصل به تفصیل در مورد بدوضع بودن حل معکوس چشمه‌ی گسترده صحبت می‌کنیم. سپس روش‌های مرسوم گسسته‌سازی[۵] (بخش ۲-۱۰) و منظم‌سازی[۶] مسئله را مورد بحث قرار می‌دهیم و راه‌حل‌های پیشنهادی محققان مختلف را مرور می‌کنیم. مطالب ذکر شده در مبانی این بخش، عموماً از [هنسن، ۲۰۰۵] برداشت شده‌اند، لیکن منابع بسیار خوبی همچون [آسترِ و همکاران، ۲۰۱۸؛ اِنگِل و همکاران، ۱۹۹۶] هم به تفصیل در مورد این مبانی به بسط و بررسی موضوع پرداخته‌اند.

[3] Under-determined
[4] Ill-posed
[5] Discretization
[6] Regularization

۲-۲ مسائل فرامعیّن و فرومعیّن

یک مسئله‌ی معکوس خطی را در نظر بگیرید که در آن رابطه‌ی مستقیم با $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ مشخص شده باشد. هر داده‌ی مشاهده شده، d_i^o، به صورت یک قید بر روی پارامترهای مدل، m_j، عمل می‌کند و هر اندازه تعداد قیود اعمال شده بر پارامترهای مدل بیشتر باشد، محدود مجاز تغییرات این پارامترها محدودتر می‌گردد. به مسئله‌ای که تعداد داده‌های مشاهده شده‌ی آن از تعداد پارامترهای مدل بیشتر است، مسئله‌ی فرامعیّن[۷] گفته می‌شود. از سوی دیگر، به دستگاه معادلاتی که تعداد داده‌های مشاهده شده در آن از تعداد پارامترهای مدل کمتر باشد و به دلیل کمبود قید، پارامترهای مدل بتوانند در حوزه‌ی نامحدودی تغییر کنند مسئله‌ی فرومعیّن[۸] گفته می‌شود [آستِر و همکاران، ۲۰۱۸].

۳-۲ مسائل بد شرط

در این بخش، مفهوم عدد شرط را برای مسائل خطی بر اساس آستِر و همکاران [۲۰۱۸] بیان می‌کنیم. حل یک دستگاه معادلات خطی را بر اساس معادله‌ی $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$ در نظر بگیرید، به دلیل وجود خطا در داده‌های مشاهداتی، همیشه به جای حل معادله‌ی فوق، یک معادله‌ی جایگزین همچون $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{m}}$ را حل می‌نمائیم. حل سوال مهمی پیش می‌آید: آیا می‌توان میزان نُرم خطای پارامترهای مدل $\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\|$ را بر اساس نُرم خطای داده‌ها $\left\|\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}\right\|$ به دست آورد؟ برای این منظور تفاضل دو رابطه‌ی فوق را در نظر بگیرید

$$(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}) = \mathbf{G}(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}) \qquad (۱-۲)$$

$$(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}) = \mathbf{G}^{-۱}(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}) \qquad (۲-۲)$$

حال می‌توان برای نُرم خطای طرفین نوشت:

$$\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\| = \left\|\mathbf{G}^{-۱}(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\| \qquad (۳-۲)$$

[7] Over-determined
[8] Under-determined

یکی از ویژگی‌های نرم خطا نامساوی $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$ است، بر این اساس می‌توان نامساوی ۲-۴ را بر اساس معادله‌ی فوق به دست آورد:

$$\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\| \leq \|\mathbf{G}^{-1}\| \left\|(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\| \tag{۲-۴}$$

رابطه‌ی ۲-۴ حدود خطای مدل را بر اساس حدود خطای داده‌ها به دست می‌دهد. لیکن می‌توان خطا را به صورت خطای نسبی نیز به دست آورد، برای این منظور:

$$\frac{\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\|}{\|\mathbf{d}\|} \leq \frac{\|\mathbf{G}^{-1}\| \left\|(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\|}{\|\mathbf{d}\|} \tag{۲-۵}$$

$$\frac{\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\|}{\|\mathbf{Gm}\|} \leq \frac{\|\mathbf{G}^{-1}\| \left\|(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\|}{\|\mathbf{d}\|} \tag{۲-۶}$$

$$\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\| \leq \|\mathbf{Gm}\| \frac{\|\mathbf{G}^{-1}\| \left\|(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\|}{\|\mathbf{d}\|} \tag{۲-۷}$$

$$\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\| \leq \|\mathbf{G}\|\,\|\mathbf{m}\|\, \frac{\|\mathbf{G}^{-1}\| \left\|(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\|}{\|\mathbf{d}\|} \tag{۲-۸}$$

$$\frac{\|\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}\|}{\|\mathbf{m}\|} \leq \frac{\|\mathbf{G}\|\,\|\mathbf{G}^{-1}\| \left\|(\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})\right\|}{\|\mathbf{d}\|} \tag{۲-۹}$$

میزان **خطای نسبی** در پارامترهای مدل با رابطه‌ی ۲-۹ به **خطای نسبی** در داده‌ها مرتبط می‌شود. به بیان دیگر، عدد شرط[9] ، $\mathrm{cond}(\mathbf{G}) = \|\mathbf{G}\|\,\|\mathbf{G}^{-1}\|$ نشان می‌دهد که خطای نسبی در پارامترهای مدل، $\frac{\|\mathbf{m}-\hat{\mathbf{m}}\|}{\|\mathbf{m}\|}$، تا چه

[9] Condition number

میزان ممکن است تحت تأثیر خطای نسبی در داده‌ها، $\frac{\|\mathbf{d}-\hat{\mathbf{d}}\|}{\|\mathbf{d}\|}$، قرار بگیرند.

به مسائلی که در آن‌ها عدد شرط ماتریس $\mathbf{G}$ بسیار بزرگ باشد، مسائل بد شرط گفته می‌شود. به عبارت دیگر، هرچقدر عدد شرط بزرگ‌تر باشد، خطا یا هر نوع عدم قطعیت دیگر در داده‌ها توسط آن بزرگنمایی شده و به پارامترهای مدل منتقل می‌گردند. به دلیل این تغییرات زیاد و نامقیّد بودن جواب، مسائل معکوس با عدد شرط بزرگ عملاً فرومعّین هستند، حتی اگر تعداد مشاهدات در آن‌ها از تعداد پارامترهای مدل بیشتر باشد. این مسائل معمولاً با ابزار تجزیه‌ی مقادیر تکین[۱۰] بررسی می‌شوند و بد شرط شدن آنها به وجود مقادیر تکین[۱۱] کوچک مربوط است (با مفهوم مقادیر تکین در بخش ۲-۴ آشنا خواهیم شد). به طور کلی دو دسته از مسائلِ بد شرط دارای مقادیر تکین کوچک هستند، مسائل دارای کمبود مرتبه[۱۲] (بخش ۲-۳-۱) و مسائل بد وضع گسسته[۱۳] (بخش ۲-۳-۲).

۲-۳-۱ مسائل دارای کمبود مرتبه

مسائل دارای کمبود مرتبه، مسائلی هستند که تعدادی از سطر و ستون‌های ماتریس $\mathbf{G}$ در آنها، به دسته‌ی دیگری از سطر و ستون‌ها وابستگی خطی دارند. در اثر این وابستگی، مقادیر تکین به دو دسته‌ی مقادیر تکین بزرگ و مقادیر تکین کوچک تقسیم می‌شوند که بین آنها یک فاصله[۱۴]ی مشخص وجود دارد. راه حل این‌گونه مسائل، تفکیک رابطه‌ی مستقیم به دو قسمت مستقل و وابسته است که به کمک آن به مسئله‌ی دیگری که خوب شرط[۱۵] هستند، می‌رسیم. به تعداد ستون‌های مستقل خطی ماتریس $\mathbf{G}$ مرتبه‌ی ماتریس گفته می‌شود.

۲-۳-۲ مسائل بد وضع گسسته

این مسائل از گسسته‌سازی مسائل بد وضع پیوسته، همچون انتگرال فِردهُلم نوع ۱ پدید می‌آیند. در این‌گونه مسائل، مقادیر تکین ماتریس $\mathbf{G}$ به آرامی به صفر میل می‌کنند، به نحوی که شرط گسسته‌ی پیکارد[۱۶] (بخش ۲-۴-۱) برقرار شود. در این مسائل هیچ فاصله‌ای (گپ) میان مقادیر تکین بزرگ و کوچک وجود ندارد، لذا

[10] Singular value decomposition (SVD)
[11] Singular values
[12] Rank-deficient problems
[13] Discrete ill-posed problems
[14] gap
[15] well-condition
[16] Discrete Picard Condition

مفهوم مرتبه را برای آنها نمی‌توان به کار برد. در مورد این مسائل هدف برقرار کردن یک تعادل[17] میان نُرم باقیمانده ($||\mathbf{d}-\mathbf{Gm}||_۲$) و اندازه‌ی بردار پارامترهای مدل ($||\mathbf{m}||_۲$) است، به نحوی که میزان خطای داده‌های شبیه‌سازی شده با مقادیر مورد انتظار خطای ثبت شده در داده‌ها انطباق داشته باشد. در اینجا اندازه، توسط مفاهیم ریاضی نُرم، نیم-نُرم[18] و یا نُرم سوبولف[19] اندازه‌گیری می‌شود.

۲-۴ فرم انتگرالی رابطه‌ی مستقیم خطی

در مسائل خطی، به طور خیلی کلی رابطه‌ی میان ورودی‌ها، سیستم و خروجی‌های مسئله توسط انتگرال رابطه‌ی ۲-۱۰ نشان داده می‌شود.

$$\int_\Omega \text{input} \times \text{system } d\Omega = \text{output} \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

در فرآیند مستقیم، هدف برآورد خروجی سیستم (output) با فرض داشتن ورودی مسئله (input) و صحیح بودن رابطه‌ی ریاضی توصیف کننده‌ی سیستم (system) است. در فرآیند معکوس، با داشتن خروجی – که عموماً داده‌های برداشت شده‌ی همراه با نوفه[20] هستند – می‌خواهیم ورودی (input)، و یا سیستم (system) را تعیین کنیم. مثالی کلاسیک از رابطه‌ی مستقیم (۲-۱۰)، انتگرال فِردهُلم نوع ۱ با هسته‌ی درجه ۲-انتگرال پذیر[21] است، که در حالت کلی می‌توان آن را به فرم رابطه‌ی ۲-۱۱ نوشت:

$$\int_۰^۱ K(s,t)f(t)dt = g(s), \qquad ۰ \leq s \leq ۱, \qquad (۲\text{-}۱۱)$$

سمت راست رابطه‌ی ۲-۱۱، g، و هسته‌ی انتگرال‌گیری آن، K، توابعی مشخص هستند، یا لاأقل فرم ریاضی هسته مشخص است، حال آنکه برای حل مسئله باید f را تعیین کرد. g، با دقتی محدود، که ناشی از نوفه است،

[17] balance
[18] seminorm
[19] Sobolev
[20] Noise
[21] Square integrable kernel

مشخص است و تنها در معدود نقاط $s_1, \cdots, s_m$ مقدار آن را برداشت کرده‌ایم. منظور از اینکه K درجه۲-انتگرال پذیر است یعنی انتگرال ۲-۱۲ دارای مقداری محدود[۲۲] است.

$$||K||^2 = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)^2 ds dt \tag{۲-۱۲}$$

با استفاده از تکنیک بسط مقادیر تکین[۲۳] می‌توان هسته‌ی انتگرال را به صورت زیر، با استفاده از جمع بی‌نهایت جمله در ۲-۱۳، بسط داد.

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(s) v_i(t) \tag{۲-۱۳}$$

به توابع $u_i(s)$ و $v_i(t)$ توابع تکینِ[۲۴] K گفته می‌شود. این مجموعه توابع نسبت به عملگر ضرب داخلی (رابطه‌ی ۲-۱۵)، یک پایه‌ی یکّه متعامد[۲۵] هستند، یعنی

$$(u_i, u_j) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i = j, \\ 0 & \text{اگر } i \neq j. \end{cases} \tag{۲-۱۴}$$

، که در آن عملگر ضرب داخلی برای دو تابع $\phi(t)$ و $\psi(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\phi, \psi) = \int_0^1 \phi(t)\psi(t) dt. \tag{۲-۱۵}$$

مقادیر تکینِ K، μ_i اعدادی غیرِ منفی هستند و همواره می‌توان آن‌ها به صورت غیرِ صعودی مرتب کرد.

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots \geq 0.$$

[22] Finite
[23] Singular value expansion
[24] singular functions
[25] Orthonormal basis

در مورد مقادیر تکین، رابطه‌ی $||K||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2$ برقرار است که نشان می‌دهد این بسط، یک سری همگرا است. می‌توان نشان داد که توابع ویژه‌ی $u_i(s)$، $v_i(t)$ و مقادیر ویژه‌ی μ_i، دارای ویژگیِ مشخصه بودن[۲۶] هستند و برای هسته‌ی مفروض K، منحصر بفرد[۲۷] می‌باشند.

امّا مهمترین ویژگیِ بسط مقادیر تکین توسط (رابطه‌ی ۲-۱۶) بیان می‌شود:

$$\int_0^1 K(s,t)v_i(t)\mathrm{d}t = \mu_i u_i(s), \qquad i = 1, 2, \dots, \qquad (۲\text{-}۱۶)$$

که نشان می‌دهد که اگر تابع $v_i(t)$ به انتگرال (رابطه‌ی ۲-۱۱) فرستاده شود، به تابع $u_i(s)$ تبدیل شده و به میزان μ_i بزرگنمایی می‌شود. حال در طرفین (رابطه‌ی ۲-۱۱)، $u_i(s)$ را ضرب کرده و نسبت به s انتگرال میگیریم.

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s,t)f(t)u_i(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s = \int_0^1 u_i(s)g(s)\mathrm{d}s \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

با جایگذاری $K(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j u_j(s) v_j(t)$ و $\int_0^1 u_i(s)u_j(s) = \delta_{ij}$ به رابطه‌ی ۲-۱۸ می‌رسیم:

$$\mu_i(v_i, f) = (u_i, g) \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

که بر مبنای آن می‌توان نتیجه‌ی حل معکوس (تابع $f(t)$) را بر حسب بسط ۲-۱۹ به دست آورد:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(u_i, g)}{\mu_i} v_i(t) \qquad (۲\text{-}۱۹)$$

بر مبنای بسط فوق، جواب $f(t)$ تنها زمانی وجود خواهد داشت که (بسط ۲-۱۹) همگرا شود. این همگرایی به ویژگی‌ها مقادیر تکین μ_i و توابع تکین u_i و v_i بستگی دارد؛ رفتار مقادیر تکین و توابع تکین نیز به خصوصیات هسته‌ی انتگرالگیری (K) وابسته است: هر چقدر هسته‌ی انتگرالگیری (K) هموارتر[۲۸] باشد، مقادیر ویژه μ_i سریع‌تر به صفر میل می‌کنند [هنسن، ۲۰۰۵؛ اسمیتیوس، ۱۹۳۸]. هموار بودن به معنی میزان مشتق‌پذیر بودن

[26] Charachteristic
[27] Unique
[28] Smooth

K است، یعنی مشتقات مرتبه بالای آن، تا چه مرتبه‌ای وجود دارند. هرچه مرتبه‌ی مشتق‌پذیری بیشتر باشد، تابع هموارتر است. در مقادیر کوچکتر μ_i، توابع ویژه‌ی u_i و v_i دارای نوسانات (یا برخورد باصفر[۲۹]) بیشتری هستند. به گفته‌ی [هنسن، ۲۰۰۵] اثبات این نکته شاید غیرممکن باشد امّا غالباً در عمل دیده می‌شود. بسط ۲-۱۹ را می‌توان به عنوان بسط طیفی $f(t)$ تعبیر کرد که خصوصیات طیفی آن توسط ضرایب $\frac{(u_i,g)}{\mu_i}$ بیان می‌شود.

مسئله‌ی معکوس به دلیل وجود این ویژه‌ی کوچک دشوار است و در ادامه‌ی این فصل روش‌های مرسوم برای کنترل تاثیر این مقادیر ویژه‌ی کوچک بر نتایج حل را ارائه خواهیم کرد.

۲-۴-۱ شرط گسسته‌ی پیکارد

شرط گسسته‌ی پیکارد بیان می‌کند که برای وجود جواب درجه ۲-انتگرال پذیرِ f_i در رابطه‌ی ۲-۱۱، g باید به گونه‌ای باشد تا شرط ۲-۲۰ برقرار گردد:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(u_i,g)}{\mu_i}\right)^2 < \infty \qquad (۲-۲۰)$$

بر اساس شرط گسسته‌ی پیکارد، از جایی به بعد، مقدار قدر مطلق ضرایب (u_i,g) باید سریعتر از مقادیر تکین متناظر μ_i کاهنده شود. برای آنکه g، درجه ۲-انتگرال پذیر باشد، ضرایب (u_i,g) باید سریعتر از $i^{-1/2}$ کاهنده شوند، بنابراین ترکیب این دو وضعیت قید قوی‌تری بر روی مسئله می‌گذارد که بر اساس آن ضرایب (u_i,g) باید سریعتر از $\mu_i i^{-1/2}$ کاهنده شوند.

شرط پیکارد (رابطه‌ی ۲-۲۰)، معادل این است که تابع سمت راست معادله‌ی، g متعلق به بُرد[۳۰] هسته‌ی انتگرال، $\Re(K)$ باشد. اگر g به هر میزان کوچک، مولفه‌ای خارج از $\Re(K)$ داشته باشد، آنگاه جواب درجه ۲-انتگرال‌پذیر به دست نخواهد آمد. برای این منظور فرض کنید که $g \notin \Re(K)$ و g_k تقریب g را با استفاده از k جمله‌ی اول بسط مقادیر تکین و حذف جملات بعد از آن نشان دهَد:

$$g_k(s) = \sum_{i=1}^{k}(u_i,g)u_i(s) \qquad (۲-۲۱)$$

[29] zero-crossing
[30] Range

دقت کنید، به دلیل اینکه توابع $u_i(s)$ یک پایه‌ی یکّه-متعامد را تشکیل می‌دهند، در رابطه‌ی (۲-۲۱) با $k \to \infty$ داریم: $g_k \to g$.

تقریب g_k در رابطه‌ی ۲-۲۱ از شرط گسسته‌ی پیکارد (رابطه‌ی ۲-۲۰) به ازای تمامی مقادیر $k = ۱, ۲, \cdots$ پیروی می‌کند. امّا تقریب f_k که بر مبنا رابطه‌ی

$$f_k(t) = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(u_i, g)}{\mu_i} v_i(t)$$

محاسبه می‌شود، در همه‌ی شرایط درجه ۲-انتگرال‌پذیر نیست. در شرایط واقعی، به دلیل وجود عدم قطعیت‌هایی همچون نوفه و مدل‌سازی نادقیق، $g \notin \Re(K)$ و (u_i, g) به ازای مقادیر خیلی کوچک μ_i هم مقدار دارد. بنابراین:

$$||f_k||_۲ \equiv (f_k, f_k)^{۱/۲} \to \infty \qquad \text{به ازای} \qquad k \to \infty$$

در حالت کلی، حل معکوس در این حالت ناپایدار خواهد بود و معادله‌ی انتگرالی ۲-۱۱، به این دلیل بد وضع است. در حالت ایده‌آل، اگر g دقیق و بدون هیچگونه نوفه‌ای اندازه‌گیری شده باشد (g به طور کامل داخل $\Re(K)$ باشد)، آن را با g^{exact} نمایش می‌دهیم. در این حالت $f^{\text{exact}} = \sum_{i=۱}^{\infty} \mu_i^{-۱}(u_i, g^{\text{exact}})v_i$ خواهد بود. در حالت واقعی امّا، $g = g^{\text{exact}} + \eta$ است که در آن η عدم قطعیت داده‌ها را نمایندگی می‌کند و نباید انتظار داشت که از شرط گسسته‌ی پیکارد پیروی کند. بنابراین هر روشی که با استفاده از جمع بینهایت جمله‌ی $\sum_{i=۱}^{\infty} \mu_i^{-۱}(u_i, g)v_i$ بخواهد f^{exact} را تقریب بزند، به جوابی بی‌فایده، با نُرم بسیار بزرگ خواهد رسید و اصلا مهم نیست که میزان نوفه (η) به چه میزان بزرگ باشد. راه حل این مسأله جایگزین کردن انتگرال ۲-۱۱ با یک مسأله‌ی منظّم شده است که بتواند f^{exact} دلخواه را تقریب بزند.

۲-۵ منظّم سازی

همانطور که در بخش قبلی دیدیم، به علت وجود مقادیر تکین کوچک K، حل معکوس، یک مسئله‌ی بد وضع و ناپایدار می‌شود. برای حل این مشکل، لازم است اطلاعات بیشتری را در مورد **جواب مطلوب** وارد مسئله کنیم تا بتوانیم یک نتیجه‌ی قابل قبول از مسئله بگیریم، به اضافه کردن اطلاعات بیشتر به حل معکوس، منظّم‌سازی گفته

می‌شود که در نتیجه‌ی آن جواب مسئله، مقیّد خواهد شد. روش رایج منظّم‌سازی این است اجازه دهیم، حل مسئله یک مقدار باقیمانده داشته باشد و نتیجه‌ی نُرم باقیمانده[۳۱] (رابطه‌ی ۲-۲۲) برابر ۰ نشود.

$$\rho(f) = ||\int_{0}^{1} K(s,t)f(t)\mathrm{dt} - g(s)||_{2} \qquad (۲-۲۲)$$

و در عین حال یکی از ۴ راه حل زیر اتخاذ گردد.

۱. مقدار مینیمم $\rho(f)$ به نحوی انتخاب گردد که تابع f عضوی از یک زیر مجموعه‌ی مشخص از فضای مدل باشد، $f \in S_f$.

۲. مقدار مینیمم $\rho(f)$ به نحوی انتخاب گردد که یک تابعک [۳۲] از اندازه‌ی f، $\omega(f)$ از مقدار مشخصی کمتر باشد، $\omega(f) \leq \delta$، که در آن δ یک کران بالا برای اندازه‌ی $\omega(f)$ است.

۳. یافتن f به نحوی که مقدار مینیمم $\omega(f)$ با قید $\rho(f) \leq \alpha$ مقیّد شود.

۴. یافتن مقدار مینیمم ترکیب خطی از $\rho(f)^2$ و $\omega(f)^2$

$$\min\{\rho(f)^2 + \lambda^2\omega(f)^2\}$$

که در آن λ یک وزن است.

در روش‌های مطرح شده‌ی بالا، α ، δ و λ تحت عنوان پارامترهای منظّم‌سازی شناخته می‌شوند و تابع $\omega(f)$ تحت عنوان **نُرمِ هموار شده** شناخته می‌شود. می‌توان اثبات کرد که با انتخاب مناسب مقادیر α، δ و λ، جواب‌های حالت ۲، ۳ و ۴ یکسان خواهد شد [هنسن، ۲۰۰۵]. روش چهارم از روش‌های فوق، راه‌حل شناخته شده‌ی **منظّم‌سازی تیخونوف**[۳۳] است که در این رساله برای منظّم‌سازی حل از آن استفاده کرده‌ایم. ایده‌ی پنهان در پشت تمامی چهار روش فوق این است که حل منظّم شده، دارای خطای کمی باشد (امّا خطا صفر نشود، چون در این صورت جواب ناپایدار خواهد شد)، و علاوه بر آن یک قید اضافی هم در مورد جواب برقرار باشد. در این صورت امیدوار خواهیم بود که جواب به دست آمده، خیلی دور از جواب درست مسئله (که پنهان و نامعلوم است) نباشد.

[31] Residual Norm

[۳۲] یک تابعک یا Functional، تبدیلی از فضای تابعی (یا فضای برداری) به اعداد اسکالر است.

[33] Tikhonov regularization

انتخاب پارامتر منظم‌سازی یکی از مهمترین گام‌های روش تیخونوف است، یکی از موثرترین روش‌های انتخاب این پارامتر استفاده از منحنی L-curve است که توسط [هنسن و اُلِری، ۱۹۹۳] پیشنهاد شده است.

از منظر آماری، باید دقت کرد که استفاده از روش‌های منظم‌سازی سبب کاهش اندازه‌ی ماتریس کوواریانس[۳۴] جواب حل معکوس در ازای افزایش سوگیری[۳۵] آن می‌شود.

۲-۶ تابع خطا در حل معکوس سینماتیکی

در بخش ۲-۵ با نُرم باقیمانده $\rho(f)$ که به صورت یک تابعک بر روی فضای مدل تعریف می‌شود، آشنا شدیم. در این بخش می‌خواهیم نُرم باقیمانده را برای مسئله‌ی لغزش در این رساله ارائه بدهیم. می‌توان این معیار خطا را برای هر دو فُرم رابطه‌ی مستقیم، چه در حوزه‌ی زمان (رابطه‌ی ۱-۴)، و چه در حوزه‌ی فرکانس (رابطه‌ی ۱-۵) ارائه کرد:

$$
\begin{aligned}
&Cost(u^f) = \\
&\sum_{n=1}^{3} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{x}\in S} \|d_n^o(\mathbf{x},t) - \dot{u}_n^o(\mathbf{x},t)\|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t = \\
&\sum_{n=1}^{3} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{x}\in S} \left\| d_n^o(\mathbf{x},t) - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\Gamma} \Delta\dot{u}_i^f(\xi,\tau) c_{ijpq}\nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np}(\mathbf{x}, t-\tau; \xi, 0) d\Gamma \right\|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{۲-۲۳}
$$

[34] Covariance Matrix
[35] Bias

با استفاده از قضیه‌ی پارسوآل (رابطه‌ی ۲-۲۵) می‌توان تابع خطا را در حوزه‌ی فرکانس نیز نوشت:

$$
\begin{aligned}
&Cost(u^f) = \\
&\sum_{n=1}^{3} \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{x}\in S} \|d_n^o(\mathbf{x},t) - \dot{u}_n^o(\mathbf{x},t)\|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{d}t = \\
&\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{3} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{x}\in S} \|d_n^o(\mathbf{x},\omega) - u_n^o(\mathbf{x},\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{d}\omega = \\
&\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{3} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{x}\in S} \left\| d_n^o(\mathbf{x},\omega) - \int_{\Gamma} \Delta\bar{u}_i^f(\xi,\omega) c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np}(\mathbf{x},\omega;\xi) d\Gamma \right\|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \, \mathrm{d}\omega
\end{aligned}
\tag{۲-۲۴}
$$

از پردازش سیگنال‌ها یادآوری می‌گردد که قضیه‌ی پارسوآل دارای شکل زیر است:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \|x(t)\|^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|X(\omega)\|^2 \, \mathrm{d}\omega \tag{۲-۲۵}
$$

و بنابراین فرمول‌بندی مسئله در هر دو حوزه‌ی زمان، یا فرکانس به نُرم باقیمانده‌ی یکسان $Cost(u^f)$ خواهد رسید. در رابطه‌ی (۲-۲۴)، $d_n^o(\mathbf{x},\omega)$، $u_n^o(\mathbf{x},\omega)$ و $\bar{u}_i^f(\xi,\omega)$ به ترتیب، معادل با تبدیل فوریه‌ی $d_n^o(\mathbf{x},t)$، $\dot{u}_n^o(\mathbf{x},t)$ و $\dot{u}_i^f(\xi,t)$ می‌باشند. در بخش بعد به ارائه‌ی روش‌های رایج جهت گسسته کردن انتگرال‌های پیوسته‌ی روابط (۲-۲۳ و ۲-۲۴) و جهت حل عددی آن‌ها می‌پردازیم.

۲-۷ گسسته‌سازی برای مدل‌سازی عددی

برای شبیه‌سازی مستقیم و حل معکوس مسائلی که رابطه‌ی مستقیم آنها دارای فرم انتگرالی است، ناچار به استفاده از روش‌های گسسته‌سازی و به کارگیری روش‌های عددی جهت برآورد انتگرال آنها هستیم. به طور مرسوم، در روش‌های محاسبات عددی، از روش گالرکین[۳۶] (بخش ۲-۷-۱) برای گسسته‌سازی انتگرال‌های پیوسته استفاده می‌شود.

[36] Galerkin

۲-۷-۱ روش گالرکین

انتگرال فِردهُلم رابطه‌ی ۲-۱۱ را در نظر بگیرید. روش گالرکین شامل انتخاب دو دسته تابع پایه $\phi_i(s)$ و $\psi_i(t)$ می‌باشد به نحوی که،

$$a_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t)\phi_i(s)\psi_j(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \qquad b_i = \int_0^1 g(s)\phi_i(s)\mathrm{d}s \tag{۲-۲۶}$$

با استفاده از نتایج رابطه‌ی ۲-۲۶، می‌توان دستگاه معادلات خطی $\mathbf{A}\xi = \mathbf{b}$ را برای تعیین بردار ξ حل کرد و با استفاده از نتایج آن داریم.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) \tag{۲-۲۷}$$

یک حالت خاصی از روش گالرکین که در آن توابع ϕ_i برابر با تابع دلتای دیراک δ در نظر گرفته می‌شوند، حالت $\phi(s) = \delta(s - s_i)$ است. در روش گالرکین، چنانچه K متقارن بوده و $\phi_i = \psi_i$ باشد، ماتریس $\mathbf{A}$ متقارن خواهد بود و به روش گالرکین در این حالت روش **رایلی-ریتز**[۳۷] گفته می‌شود.

در مدل‌سازی سینماتیکی لغزش، توابع پایه‌ی $\phi_i(s)$ که به منظور بسط **فضای داده** استفاده می‌شوند بایستی خروجی رابطه‌ی مستقیم را در ایستگاه‌های ثبت داده به دست بدهند. از این روی، انتخاب توابع $\delta(s - s_i)$ جهت بسط فضای داده، محدودیتی است که معمولاً توسط روش و فناوریِ داده برداری بر مسئله تحمیل می‌شود.

۲-۸ محاسبه‌ی عددی مقادیر انتگرال

جهت محاسبه‌ی انتگرال‌های پیوسته در برنامه‌های کامپیوتری، معمولاً مقادیر انتگرالده[۳۸] در نقاط معین $t_1, t_2, \cdots, t_n$ محاسبه شده و این مقادیر با وزن‌های مخصوص $w_1, w_2, \cdots, w_n$ با یکدیگر جمع می‌شوند. چنین روشی برای محاسبه‌ی عددی مقدار انتگرال، به روش کوادریچر مشهور است.

[37] Rayleigh-Ritz
[38] Integrand

۲-۸-۱ روش کوادریچر

رابطه‌ی ۲-۲۸ فرم کلّی قوانین کوادریچر را نشان می‌دهد:

$$\int_0^1 f(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f(t_j) \tag{۲-۲۸}$$

یکی از ساده‌ترین روش‌های کوادریچر، روش **نقطه‌ی میانی** است که در آن حوزه‌ی انتگرال‌گیری (در اینجا $[0, 1]$) به بازه‌هایی با عرض Δt تقسیم می‌شود و ما نقاط $t_1, t_2, \cdots, t_n$ را از میانه‌ی آنها برمی‌داریم.

$$t_j = \frac{\Delta t}{2} + (j-1)\Delta t \tag{۲-۲۹}$$

که در آن

$$\Delta t = \frac{1}{n} \tag{۲-۳۰}$$

آنگاه انتگرال رابطه‌ی ۲-۲۸ به فرم سری زیر درمی‌آید.

$$\int_0^1 f(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} \Delta t f(t_j) \tag{۲-۳۱}$$

در این صورت وزن نقاط کوادریچر برابر با $w_j = \Delta t$ می‌شود. از میان روش‌های کوادریچر، می‌توان به روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای و قاعده‌ی سیمپسون اشاره کرد.

یکی از مشهورترین روش‌های کوادریچر که در این رساله به منظور برآورد عددی انتگرال‌ها از آن استفاده می‌کنیم، روش گاوس[39] است. این قانون را می‌توان جهت برآورد انتگرال رابطه‌ی ۲-۱۱ به کارگرفت و با استفاده از n نقطه‌ی کوادریچر، رابطه‌ی مستقیم را در m نقطه‌ی مشاهده $s_1, s_2, \cdots, s_m$ برآورد کرد. با استفاده از این روش به ماتریس $\mathbf{A}$ با ابعاد $m \times n$، به همراه نسخه‌ی گسسته شده‌ی سمت راست معادله می‌رسیم.

$$a_{ij} = w_j K(s_i, t_j), \qquad b_i = g(s_i), \tag{۲-۳۲}$$

[39] Gaussian Quadrature Method

با استفاده از این روش، نتیجه‌ی حل معکوس بردار $(\tilde{f}(t_1), \cdots, \tilde{f}(t_n))^T$ خواهد شد که $\tilde{f}$ شامل تقریبی از نمونه‌های جواب درست در نقاط روش کوادریچر خواهد بود.

هنگامیکه یک مسئله‌ی بد وضع توسط روش‌های فوق گسسته می‌شود، مشکلات ذاتی آن (شامل کاهش مقادیر تکین به سمت صفر) به فضای گسسته منتقل می‌شوند، بدین ترتیب که ماتریس $\mathbf{A}$ یا دارای دسته‌ای از مقادیر تکین بسیار کوچک است، و یا مقادیر تکین آن به آرامی به سمت صفر میل می‌کنند. بنابراین مسئله فرومعیّن خواهد بود، مگر آنکه گسسته‌سازی آنقدر درشت[40] باشد که مقادیر تکین کوچک خودشان را در حل معکوس ظاهر نسازند.

۲-۹ روش‌های رایج منظّم‌سازی در حوزه‌ی گسسته

۲-۹-۱ روش منظّم‌سازی تیخونوف

روش منظّم‌سازی تیخونوف را پیشتر در بخش ۲-۵ معرفی نموده و ایده‌ی کلی آن را مطرح کردیم. به بیان جبر خطی، مسئله منظّم‌سازی تیخونوف به شکل زیر قابل فرمول‌بندی است:

$$\begin{aligned} &\min ||\mathbf{Gm} - \mathbf{d}||_2^2 \\ &||\mathbf{m}||_2^2 < \alpha \end{aligned} \tag{۲-۳۳}$$

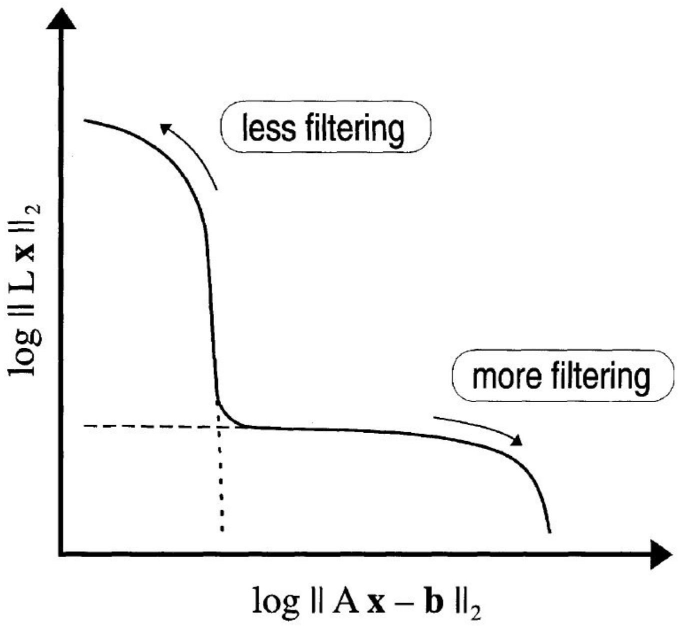
جواب نامعادله‌ی ۲-۳۳ به شکل ماتریسی زیر نیز قابل بیان است:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m} - \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \tag{۲-۳۴}$$

رابطه‌ی ۲-۳۴ را می‌توان با استفاده از معادله‌ی نُرمال[41] و با روش حدأقل مربعات حل کرد:

$$\mathbf{m} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{G}^T & \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T & \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۲-۳۵}$$

[40] Coarse
[41] Normal Equation



شکل ۲-۱: منحنی L-curve برگرفته از [هنسن، ۲۰۰۵] به صورت شماتیک نمایش داده شده است، در این شکل، محور افقی، نُرم باقیمانده و محور قائم، اندازه‌ی نُرم مدل را نشان می‌دهد. شکل منحنی L-curve حتماً باید در نموداری با محورهای لگاریتمی ترسیم گردد[هنسن و اُلِری، ۱۹۹۳]. مقدار بهینه‌ی α از نقطه‌ی دارای بیشینه‌ی انحنا در نمودار به دست می‌آید. هر چه مقادیر بزرگتر α به عنوان پارامتر منظّم‌سازی انتخاب شوند، میرایی بیشتری بر مسئله اعمال شده، اطلاعات کمتری معکوس شده و مدل به دست آمده دارای جزئیات کمتری خواهد بود.

برای انتخاب پارامتر منظّم‌سازی α، این عدد را بر محدوده‌ی وسیعی از مقادیر بزرگتر از صفر تغییر داده و مقادیر $||\mathbf{Gm}-\mathbf{d}||_۲^۲$ و $||\mathbf{m}||_۲^۲$ محاسبه می‌شوند، و در یک نمودار لگاریتمی ترسیم می‌گردند. هنسن و اُلِری [۱۹۹۳] نشان دادند که چنین نموداری، برای مسائل بدوضع به شکل L در خواهد آمد، از این روی به چنین نمودار L-curve گفته می‌شود. با توجه به این نمودار، بهترین انتخاب برای مقدار α، نقطه‌ی دارای بیشترین انحنا[۴۲] خواهد بود. در روش تیخونوف (رابطه‌ی ۲-۳۳)، می‌توان به جای نُرم مدل، معیار دیگری از اندازه‌ی مدل، یا نیم‌نُرم مدل $\mathbf{Lm}$ را در نظر گرفت. به چنین روشی، منظم‌سازی مرتبه بالاتر تیخونوف[۴۳] گفته می‌شود.

[42] Maximum curvature point
[43] Higher-order Tikhonov regularization

۲-۹-۲ روش حل معکوس بیزی

توسعه و استفاده از روش‌های حل معکوس بیزی در دهه‌ی ۹۰ میلادی مورد توجه پژوهشگران ژئوفیزیک قرار گرفت. در روش‌های بیزی از نگرشی آماری برای انتخاب یک بردار پارامترهای مدل مناسب استفاده می‌شود. در این روش، با بردار پارامترهای مدل همچون یک متغیر تصادفی برخورد می‌شود که دارای یک توزیع چگالی احتمال[۴۴] بوده و به آن **توزیع پسین**[۴۵] گفته می‌شود. چنانچه توزیع احتمال پسین را داشته باشیم می‌توانیم با استفاده از آن یکی از مدل‌ها را با استفاده از معیارهای آماری به عنوان جواب انتخاب کنیم. باید توجه کرد که در روش بیزی، باید اطلاعات پیشین خودمان را در مورد جواب مسئله وارد فرمول‌بندی کنیم. این اطلاعات پیشین ممکن است قیود مورد نظر ما در مورد جواب (همچون صفر بودن احتمال وقوع برخی از مدل‌ها) یا شهودی که از تجربه‌ی حل مسائل گوناگون به دست آورده‌ایم، باشند. این اطلاعات پیشین به صورت تابع چگالی احتمال **توزیع پیشین**[۴۶] وارد مسئله می‌شوند و آن را با $p(\mathbf{m})$ نمایش می‌دهیم. در این روش باید احتمال شرطی $f(\mathbf{d^o}|\mathbf{m})$ را داشته باشیم، که در آن به ازای رخداد یک مدل و یک داده‌ی مشاهده شده، احتمال اینکه داده توسط مدل مفروض تولید شود به دست می‌آید. با این اطلاعات، احتمال وقوع مدل مفروض به شرط مشاهده‌ی داده‌ی $\mathbf{d}^o$، $q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o})$، را با استفاده از قضیه‌ی احتمال بیز (رابطه‌ی ۲-۳۶) به دست می‌آوریم.

$$q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o}) = \frac{f(\mathbf{d^o}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})}{\int_{\text{model space}} f(\mathbf{d^o}|\mathbf{m})p(\mathbf{m})\mathrm{d}\mathbf{m}} \qquad (۲\text{-}۳۶)$$

به تابع چگالی احتمال $q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o})$، توزیع احتمال پسین گفته می‌شود. لازم به ذکر است که تابع چگالی احتمال $q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o})$ یک جواب منحصر بفرد که بتوانیم آن را به عنوان حل مسئله در نظر بگیریم، نتیجه نمی‌دهد، با این حال اگر بخواهیم یک جواب برای مسئله به دست بیاوریم می‌توانیم مدلی را که بیشینه‌ی $q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o})$ را نتیجه می‌دهد، برگزینیم. به این جواب اصطلاحاً (MAP)[۴۷] گفته می‌شود. یک راه حل دیگر انتخاب مدل میانگین با استفاده از توزیع احتمال پسین است.

یک حالت خاص این است که داده‌ها و پارامترهای مدل دارای توزیعِ احتمالاتیِ نرمالِ چندمتغیره[۴۸] بوده و رابطه‌ی مستقیم بین پارامترهای مدل و داده‌ها خطی باشد. در این حالت، چنانچه ماتریس کوواریانس داده‌ها

[44] Probability density function
[45] Posterior distribution
[46] Prior distribution
[47] Maximum a Posterior
[48] Multivariate normal distribution (MVN)

$\mathbf{C}_D$، میانگین مدل‌های پیشین $\mathbf{m}_{prior}$، و کوواریانس توزیع احتمالاتی مدل‌های پیشین $\mathbf{C}_M$، مشخص باشد برای $p(\mathbf{m})$ و $f(\mathbf{d^o}|\mathbf{m})$ داریم:

$$p(\mathbf{m}) \propto \exp(-\frac{۱}{۲}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior})^T\mathbf{C}_M^{-۱}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior})) \tag{۳۷-۲}$$

$$f(\mathbf{d}^o|\mathbf{m}) \propto \exp(-\frac{۱}{۲}(\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)^T\mathbf{C}_D^{-۱}(\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)) \tag{۳۸-۲}$$

بنابراین بر اساس تئوری احتمال بیز (رابطه‌ی ۲-۳۶)، فرم تابعی توزیع پسین به شکل (رابطه ۲-۳۹) خواهد شد:

$$q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o}) \propto \exp(-\frac{۱}{۲}((\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)^T\mathbf{C}_D^{-۱}(\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)+(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior})^T\mathbf{C}_M^{-۱}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior}))) \tag{۳۹-۲}$$

تارانتولا [۲۰۰۴] نشان داد که (رابطه‌ی ۲-۳۹) را می‌توان به صورت یک توزیع نرمال چند متغیره‌ی ساده‌تر به فرم زیر نوشت و $\mathbf{m}_{MAP}$، مقدار میانگین و همچنین دارای بیشینه‌ی احتمال توزیع پسین است.

$$q(\mathbf{m}|\mathbf{d^o}) \propto \exp(-\frac{۱}{۲}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{MAP})^T\mathbf{C}_{M'}^{-۱}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{MAP})) \tag{۴۰-۲}$$

که در آن

$$\mathbf{C}_{M'} = (\mathbf{G}^T\mathbf{C}_D^{-۱}\mathbf{G}+\mathbf{C}_M^{-۱})^{-۱} \tag{۴۱-۲}$$

می‌توان نشان داد که بیشینه‌ی (رابطه‌ی ۲-۳۹) برابر با یافتن مقدار حدأقل برای (رابطه‌ی ۲-۴۲) است.

$$\min\left((\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)^T\mathbf{C}_D^{-۱}(\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)+(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior})^T\mathbf{C}_M^{-۱}(\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior})\right) \tag{۴۲-۲}$$

بنابراین، به نظر می‌رسد که جواب روش‌های بیزی در حالت خاصی معادل با روش منظم‌سازی تیخونوف است.

چنین وضعیتی با فرض حالت‌های خاص $\mathbf{C}_D = \Gamma^2\mathbf{I}$ و $\mathbf{C}_M = \alpha^2\mathbf{I}$ قابل بررسی است، در این حالت خاص:

$$\min\left(\frac{1}{\Gamma^2}\left\|(\mathbf{Gm}-\mathbf{d}^o)\right\|^2+\frac{1}{\alpha^2}\left\|\mathbf{m}-\mathbf{m}_{prior}\right\|^2\right) \tag{۲-۴۳}$$

برابر با جواب روش بیزی خواهد بود که معادل با نتیجه‌ی حل معکوس در روش تیخونوف است.

در صورتی که توزیع آماری خطا به صورت توزیع نرمال چند متغیره (MVN) نباشد و فضای مدل، فضایی بزرگ باشد، روش کارآمدِ نمونه برداری **شبیه‌سازی مونت کارلو با استفاده از زنجیره مارکوف**[۴۹] مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۲-۱۰ روش‌های متداول گسسته‌سازی و حل معکوس سینماتیکی چشمه‌ی لرزه‌زا

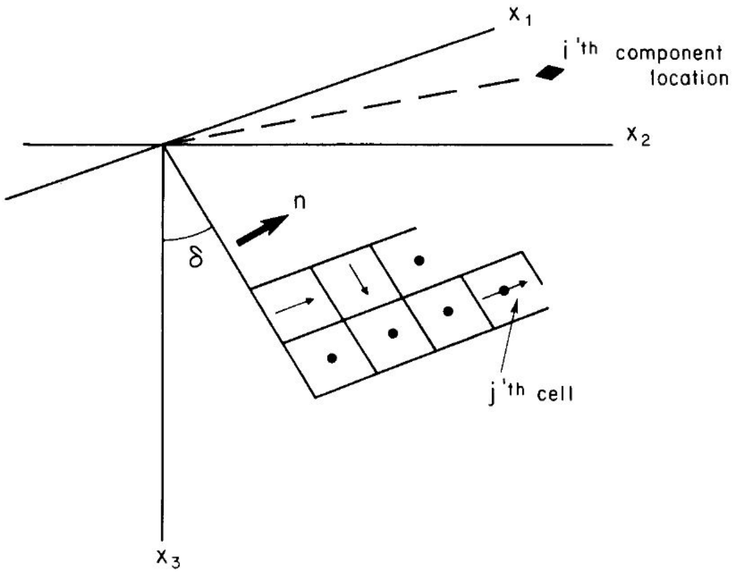
۲-۱۰-۱ گسسته کردن تابع چشمه در مکان

پیشترَ گفتیم که تابع پیوسته‌ی چشمه‌ی لرزه‌زا، تابعی از مکان و زمان می‌باشد و به منظور برآورد عددی انتگرال مستقیم قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی، نیازمند گسسته کردن انتگرال و استفاده از روش‌های عددی جهت برآورد آن می‌باشیم. متداول‌ترین روش گسسته کردن تابع چشمه در بُعد مکان، روش گسلهای محدود است که توسط اولسون و اپسل [۱۹۸۲] و هارتزل و هیتون [۱۹۸۳] تقریباً در یک زمان ارائه شده است.

این روش در زمره‌ی روش‌های گالرکین می‌باشد. برای درک بهتر، حالتی را در نظر بگیرید که در آن لغزش فقط تابعی از مکان بوده و تغییرات زمانی برای لغزش وجود نداشته باشد (لغزش استاتیکی)، و نابجایی فقط در راستای **امتداد** گسل باشد. در این حالت می‌توان لغزش را بر روی یک صفحه‌ی دو بعدی به صورت رابطه‌ی ۲-۴۴ بر روی تعدادی تابع پایه در نظر گرفت.

$$\Delta u_s^f(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{N^{sf}} W_i(\xi,\eta)C_i \tag{۲-۴۴}$$

[49] Markov Chain Monte Carlo (MCMC)



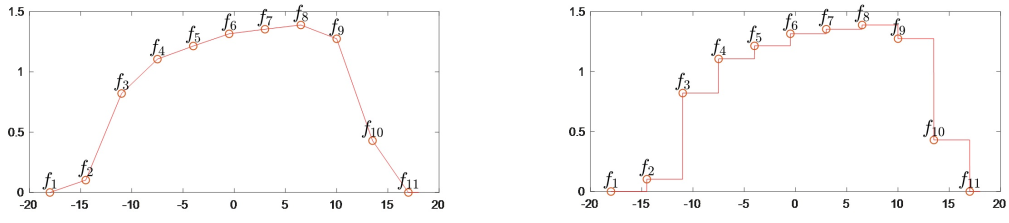
شکل ۲-۲: روش گسل‌های محدود و زیرگسل‌هایی که در این روش کل سطح گسل را پوشش می‌دهند. در روش پیشنهادی اولسون و اپسل [۱۹۸۲] به ازای هر یک از زیرگسل‌ها یک تابع پایه $W_j(\xi,\eta)$ وجود دارد که مقدار آن به ازای $(\xi,\eta)\in\Gamma_j$ برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با ۰ می‌باشد.

که در آن N^{sf} تعداد توابع پایه‌ی $W_i(\xi,\eta)$ است که از آنها برای بسط لغزش در جهت امتداد گسل $\Delta u_s^f(\xi,\eta)$ بر روی صفحه‌ی گسل $(\xi,\eta)\in\Gamma$ استفاده می‌شود. توابع پایه‌ی $W_i(\xi,\eta)$، فقط بر روی ناحیه‌ی محدودی از گسل (به نام زیرگسل[50]) دارای مقدار ۱ می‌باشند و در خارج از آن، مقدارشان برابر با ۰ است. به طور کلی توابع پایه در این روش، همانند توابع شکلی در روش اجزای محدود[51] بوده و می‌توان از توابع تکّه‌ای پیوسته[52] به عنوان تابع پایه جهت بسط لغزش بر روی گسل استفاده کرد. با این وجود، استفاده از تابع ثابت[53] متداول‌تر است و استفاده از این تابع به تقسیم‌بندی گسل به زیرگسل‌های با لغزش ثابت می‌انجامد.

به علت استفاده از المان‌های با لغزشِ ثابت، تابعی که تقریب زده می‌شود ناپیوسته و از خانواده توابع با پیوستگی C^0 خواهد بود، به نحوی که لغزشی که از این روش به دست می‌آید، تابعی پیوسته نیست (شکل ۲-۳(الف)).

لیو و آرچولتا [۲۰۰۴] برای گسسته‌سازی تابع چشمه در مکان از المانهای با توابع شکلی درجه ۱ (خط) استفاده کردند، با استفاده از این توابع شکلی تابعی که تقریب زده می‌شود، پیوسته بوده و مشتق مرتبه اول آن ناپیوسته است. اصطلاحاً به چنین تابعی، پیوسته C^1 گفته می‌شود (شکل ۲-۳(ب)).

[50] Sub-fault
[51] Finite element metod
[52] Piecewise continous
[53] Constant function



(ب) (الف)

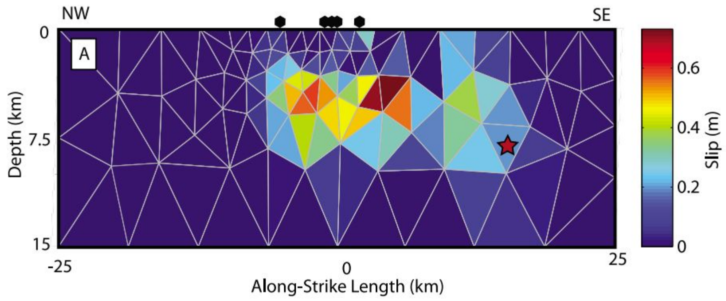
شکل ۲-۳: نمونه‌ای از تقریب یک تابع با استفاده از توابع پایه‌ی تکه پیوسته (الف) تابع C^0 و (ب) تابع C^1.

در روش گسل‌های محدود، تقسیم بندی گسل به زیرگسل‌هایی با توابع شکلی پیوسته از مرتبه‌های بالاتر چندان مرسوم نیست و غالباً در روشهای مختلف گسل‌های محدود، از زیرگسل‌های با لغزش ثابت استفاده می‌کنند.

در فصل ؟؟ قضیه‌ی معّرف زلزله‌شناسی را که بصورت انتگرال پیچش می‌باشد، با استفاده از تبدیل فوریه به فضای فرکانسی منتقل کردیم و دیدیم که در فضای فرکانسی، تابع چشمه در هر فرکانس مفروض ω_0 به داده‌های ثبت شده بر روی سطح زمین در همان فرکانس مرتبط می‌شوند. با استفاده از این نتیجه‌گیری می‌توان لغزش استاتیکی (معادل فرکانس صفر) روی سطح گسل را با تغییر مکان استاتیکی بر روی سطح زمین مرتبط دانست (رابطه‌ی ۱-۵). با فرمول‌بندی رابطه‌ی مستقیم در فرکانس صفر، می‌توان داده‌های استاتیکی ژئودتیکی، اعم از داده‌های GNSS یا InSAR را معکوس کرد و مدل شکستگی استاتیکی گسل را با دقت مناسبی به دست آورد. استفاده از این اطلاعات برای مطالعه‌ی تغییر شکل‌های پوسته‌ی زمین برای اولین بار توسط [ماسونه و فیگل، ۱۹۹۸] پیشنهاد گردید. با توجه به تعداد بالای مشاهدات در داده‌های InSAR و مدلسازی نسبتاً ساده‌تر تغییر شکل‌های استاتیکی، در مقایسه با تغییر شکل‌های دینامیکی ناشی از شکست، کاهش ابعاد زیر گسل‌ها و ریز کردن آنها امکان‌پذیر شده و همچنین بهینه‌یابی پارامترهای چنین حل معکوسی، ساده‌تر انجام می‌شود.

یکی از روش‌های گسسته‌سازی لغزش در مکان که در حل معکوس داده‌های ژئودتیک کاربرد دارد، استفاده از تقسیم‌بندی گسل با استفاده از زیرگسل‌های مثلثی و با لغزش ثابت است که توسط بارنهارت و لومان [۲۰۱۰] ارائه گردید. ابعاد زیر گسل‌ها با استفاده از یک روش تکراری، مبتنی بر مفهوم مقیاس‌های هموار[۵۴] که از ماتریس رزولوشن مدل[۵۵] به دست می‌آید، محاسبه می‌گردد. در این روش، المان‌های مثلثی ناحیه‌ای از گسل را پوشش می‌دهند که می‌توان فرض کرد لغزش در آن‌ها هموار است. شکل ۲-۴ نمونه‌ی حل معکوس با استفاده از روش مذکور را برای زمین لرزه‌ی ۲۰۰۴ پارکفیلد[۵۶] کالیفرنیا با بزرگای گشتاوری Mw ۶٫۰ نشان می‌دهد.

[54] Smoothing scales
[55] Model resolution matrix
[56] Parkfield



شکل ۲-۴: مدل لغزش گسل در زلزله‌ی ۲۰۰۴ پارکفیلد کالیفرنیا با بزرگای گشتاوری M_w ۶٫۰، حل معکوس با استفاده از داده‌های اینسار صورت گرفته است و صفحه‌ی گسل با استفاده از زیرگسل‌های مثلثی با لغزش ثابت پوشانیده شده است [بارنهارت و لومان، ۲۰۱۰].

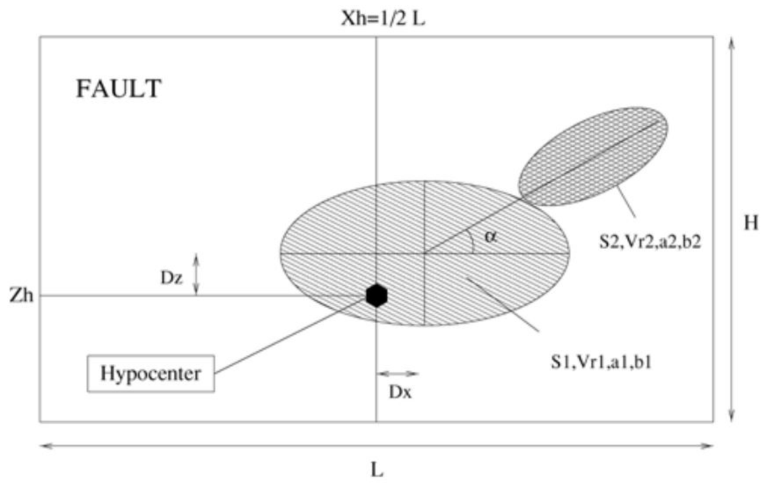
لازم به ذکر است که چنین جوابی فقط لغزش نهایی گسل را نتیجه می‌دهد و اطلاعاتی از محل آغاز شکستگی و زمان شروع آن، سرعت انتشار گسیختگی و زمان خیزش نقاط مختلف واقع بر گسل به دست نمی‌دهد.

مروری بر نتایج مدل‌های لغزش زمین‌لرزه‌های پیشین (برای مثال مای و ثینگ‌بیجام [۲۰۱۴]) نشان می‌دهد که مدل‌های لغزش زمین‌لرزه‌های پیشین عموماً از یک یا دو تنشگاه[57] اصلی تشکیل شده است که بیشینه‌ی لغزش آن‌ها در مرکز تنشگاه قرار داشته و به شکل دو سویه[58] از دامنه‌ی آن‌ها کاسته می‌شود. در این حالت به نظر می‌رسد بیضی با لغزش ثابت بتواند تابع پایه‌ی مناسبی برای توصیف لغزش بر روی گسل باشد (شکل ۲-۵)، از همین روی برخی محققین از قبیل [والی و بوشون، ۲۰۰۴؛ دی‌کارلی و همکاران، ۲۰۱۰؛ تواردزیک و همکاران، ۲۰۱۲] با استفاده از توابع بیضی شکل اقدام به بسط مکانی تابع لغزش می‌کنند.

۲-۱۰-۲ حل معکوس چشمه لرزه‌زا در حوزه‌ی زمان

در بُعد زمان، روش‌های گسسته‌سازی تابع چشمه تنوع زیادی دارند. در ابتدایی ترین تلاش‌ها، اولسون و اپسل [۱۹۸۲]؛ هارتزل و هیتون [۱۹۸۳] سعی کردند که با استفاده از مجموعه‌ای از توابع مثلثی شکل که نسبت به هم دارای تاخیر زمانی هستند، برای گسسته‌سازی تابع چشمه در بعد زمان استفاده کنند. این روش به دستگاه معادلات خطی منجر می‌شود و می‌توان آن را به سادگی و با استفاده از روش حداقل مربعات حل کرد. نحوه‌ی گسسته‌سازی تابع نرخ لغزش در دامنه‌ی زمان، در شکل ۲-۶ به نقل از [دی‌لوئیس و همکاران، ۲۰۰۲] نشان داده شده است. چنان که در (شکل ۲-۶ (ج)) دیده می‌شود، می‌توان تابع نرخ لغزش در راستای امتداد بر روی یک نقطه‌ی دلخواه

[57] Asperity
[58] Bilaterally



شکل ۲-۵: استفاده از توابع پایه‌ی بیضی شکل به منظور بسط مکانی لغزش بر روی گسل [والی و بوشون، ۲۰۰۴].

گسل، برای مثال در مختصات $\boldsymbol{\xi}_i$، را بر حسب مجموع تعدادی تابع مثلثی با عرض مشخص و ارتفاع مجهول بسط داد :

$$\Delta \dot{u}_i(\boldsymbol{\xi}_i, t) = \sum_{j=1}^{k} A_j T(t - t_i - j\Delta t_{lag}) \qquad (۲\text{-}۴۵)$$

که در آن $T(t)$، یک تابع پایه برای بسط نرخِ لغزش است، و در شکل ۲-۶(ج) از یک مثلث متساوی‌الساقین به عنوان تابع پایه‌ی بسط لغزش استفاده شده است. t_i زمان رسیدن شکستگی به زیر گسل iاُم است و Δt_{lag}، میزان تأخیر توابع پایه‌ی مثلثی نسبت به یکدیگر است. n نیز تعداد توابع پایه‌ی نرخ لغزش را نشان می‌دهد. زمان رسید گسیختگی به نقطه‌ی i با فرض ساده شده‌ی سرعت یکنواخت انتشار گسیختگی که در آن جبهه گسیختگی به صورت دوایر هم مرکز فرض می‌شود، محاسبه می‌شود.

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۴۵) در (۱-۴) رابطه‌ی مستقیم میان داده‌ها و پارامترهای مدل A_j به شکل زیر در می‌آید.

(۲-۴۶)

$$\dot{u}_n^o(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^{N^{sf}} \sum_{m=1}^{k} A_{m,i} T(t-t_i-m\Delta t_{lag}-\tau) c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np}(\mathbf{x},\tau;\xi,0) d\Gamma$$

می‌توان $A_{m,i}$ را از انتگرال فوق بیرون آورد و دستگاه معادلات خطی $\mathbf{d^o} = \mathbf{GA}$ را تشکیل داد و با روش‌های متداول حل دستگاه معادلات خطی، با اعمال یک قید منظم سازی آن را حل کرد.

در این روش عموماً سرعت گسیختگی (V_r) برابر با ۰٫۸۵ تا ۰٫۹۰ سرعت موج برشی فرض می‌شود، که البته فرض درستی نیست و مطالعاتی همچون [دانهام و آرچولتا، ۲۰۰۴] نشان می‌دهند که امکان انتشار شکستگی با سرعتی بیش از سرعت موج برشی وجود دارد که به آن شکست فرابرشی[59] می‌گویند. همچنین در این روش، برای محاسبه‌ی t_i به محل دقیق کانون زمین‌لرزه نیاز است و باید فاصله‌ی کانون با هر نقطه روی گسل (R) محاسبه گردیده و زمان رسید شکستگی از رابطه‌ی $t_i = \frac{R}{V_r}$ محاسبه گردد.

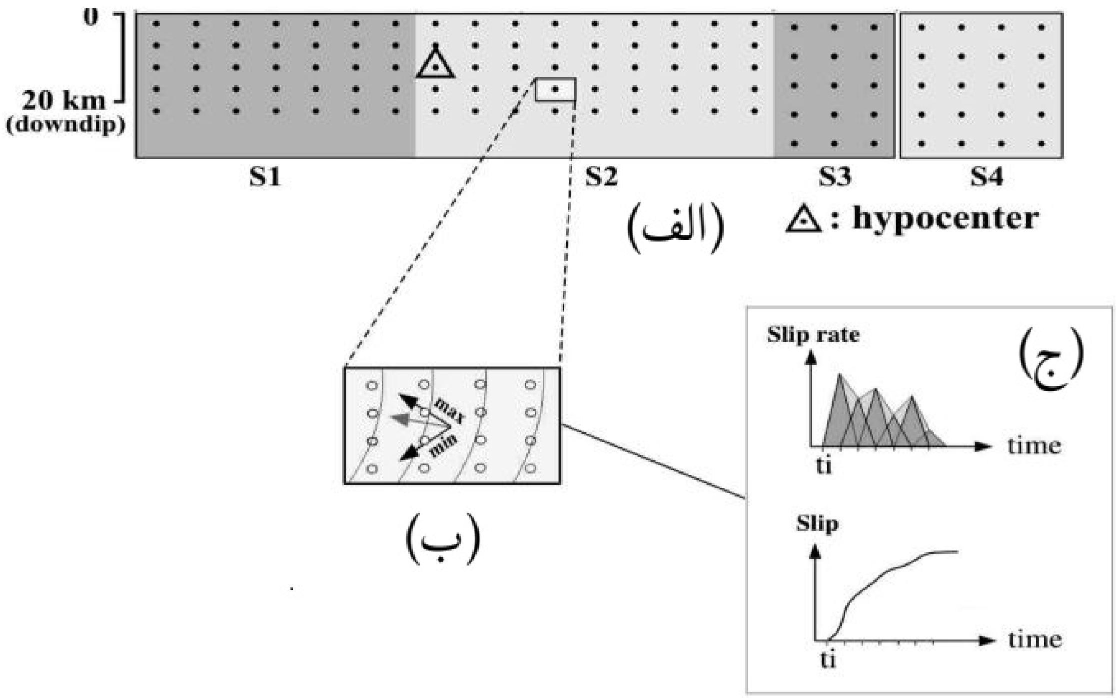
در ادبیات حل معکوس، استفاده از شکل‌های مختلفی از توابع پایه‌ی لغزش همچون جعبه‌ای[60]، ذوزنقه[61] و سایر توابع محمل فشرده مرسوم است. نیلسن و مادریاگا [۲۰۰۳] ثابت کردند که تابع زمان منبع یوفه[62]، (رابطه‌ی ۲-۴۷) برابر با حل ترک خود شبیه‌کاستروف [۱۹۶۴] است. بر این اساس تینتی و همکاران [۲۰۰۵] روش حل معکوسی را با استفاده از تابع زمان منبع یوفه توسعه دادند.

$$Y(t) = \frac{2}{\pi\tau_R} H(t) H(\tau_R - t) \sqrt{\frac{\tau_R - t}{t}} \qquad (۲\text{-}۴۷)$$

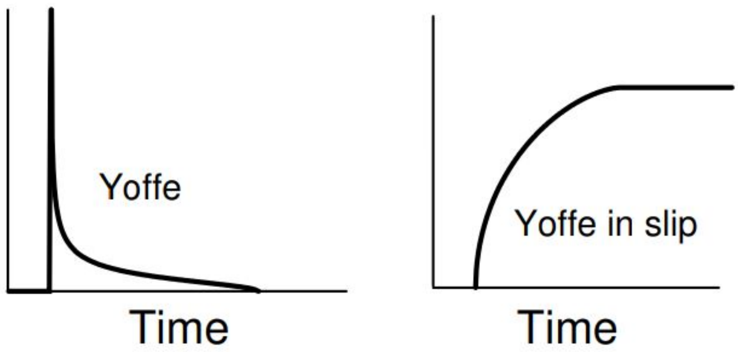
در رابطه‌ی (۲-۴۷)، $H(t)$ تابع پله‌ای واحد (هویساید) و τ_R پارامتر زمان خیزش است. شکل ۲-۷ تابع یوفه را نشان می‌دهد.

در ادبیات مدل‌سازی و حل معکوس گسل‌های محدود، به روشی که از چندین تابع زمان منبع، به شیوه‌ی نشان داده شده در شکل (۲-۶ (ج)) استفاده کند، روش چند پنجره‌ای[63] گفته می‌شود. داس و کاستروف [۱۹۹۰] با فرض پنجره‌های زمانی متعدد به صورت تابع مستطیلی و با صرفنظر از پارامتر زمان رسید، با تعیین ارتفاع این

[59] Supershear rupture
[60] Box car
[61] Trapizoidal
[62] Yoffe
[63] Multi-window



شکل ۲-۶: گسسته‌سازی تابع چشمه در حوزه‌ی زمان با استفاده از توابع مثلثی به نقل از دی‌لوئیس و همکاران [۲۰۰۲] برای تعیین تابع چشمه‌ی زمین‌لرزه‌ی ۱۹۹۹ ازمیت ترکیه. (الف) گسسته‌سازی گسل در بُعد مکان، با استفاده از زیرگسل‌های مستطیلی شکل، توابع گرین در مرکز زیرگسل محاسبه گردیده‌اند. (ب) تجزیه‌ی لغزش به دو راستا بر روی صفحه‌ی گسل (ج) تغییرات نرخِ زمانی لغزش (نمودار بالا) با استفاده مجموعه‌ای از مثلث‌های همپوشاننده محاسبه می‌شود، لغزش با انتگرال گیری از تابع نرخ لغزش به دست می‌آید (نمودار پایین).



شکل ۲-۷: تابع زمان منبع یوفه مورد استفاده در روش حل معکوس ارائه شده توسط [تینتی و همکاران، ۲۰۰۵] که معادل جواب کاستروف [۱۹۶۴] برای تَرَکِ خود شبیه است.

مستطیل‌ها، اقدام به حل معکوس تابع چشمه کردند و بدین ترتیب توانستند جبهه‌ی گسیختگی را در نقاط مختلف روی سطح گسل شناسایی کنند در حل [داس و کاستروف، ۱۹۹۰] از روش برنامه ریزی خطی[۶۴] برای تعیین مقدار بهینه‌ی پارامترهای مدل استفاده شد. در این روش مقدار مینیمم نُرم ۱ خطا یافت می‌شود.

یکی از جدیدترین توسعه‌های حل معکوس چند پنجره‌ای، روش گالوویچ و همکاران [۲۰۱۵] است که در آن تابع زمان منبع، تابع دلتای دیراک در نظر گرفته شده است. در این روش فضای مدل با استفاده از توابع زمان منبع بسیار زیادی گسسته می‌شود، بدین ترتیب که در هر یک از زیر گسل‌های مسئله، مقدار دامنه‌ی توابع زمان منبع از لحظه‌ی صفر (زمان شروع زمین لرزه) تا یک زمان قابل قبول برای پایان شکستگی، یا یک گام زمانی مشخص، مجهول فرض می‌شوند. سپس این مجهولات طی فرآیند حداقل مربعات نامنفی[۶۵] تعیین می‌شوند. این روش حل معکوس در بسته‌ی نرم‌افزاری LinSlipInv (https://github.com/fgallovic/LinSlipInv) پیاده‌سازی و ارائه شده است.

در کنار روش‌های فوق، گروهی از محققین [همچون لیو و آرچولتا، ۲۰۰۴؛ کوشتودیو و همکاران، ۲۰۰۵؛ مونلی و مای، ۲۰۰۸] تابع چشمه را در زمان با استفاده از روش چند پنجره‌ای تقریب نمی‌زنند. این گروه به جای بر هم نهی اثرات چندین تابع زمان منبع در نقاط مختلف روی گسل، یک تابع زمان منبع را به جای چندین تابع در نظر می‌گیرند. به چنین روش‌هایی، روش تک پنجره‌ای[۶۶] گفته می‌شود. مشخصات زمانی این تابع در هر زیر گسل با استفاده از پارامترهای زمان رسید و زمان خیزش به دست می‌آیند و بطور کلی رابطه‌ی آن‌ها با داده‌ها، یک رابطه‌ی غیر خطی است. در این روش‌ها معمولاً مقدار پارامترهای فوق از یک روش بهینه‌یابی عمومی[۶۷] همچون روش شبیه‌سازی تبرید[۶۸] یا روش الگوریتم ژنتیک[۶۹] به دست می‌آید. یکی از جدیدترین توسعه‌ها در روش تک پنجره‌ای توسط هالو و گالوویچ [۲۰۲۰] با استفاده از روش حل معکوس بیزی و با استفاده از نمونه‌برداری MCMC از فضای مدل انجام شده است.

[64] Linear Programming
[65] Non-negative least squares
[66] Single Window
[67] Global Optimization
[68] Simulated Annealing
[69] Genetic Algorithms

۲-۱۰-۳ حل معکوس چشمه‌ی لرزه‌زا در حوزه‌ی فرکانس

رابطه‌ی ۱-۵ نشان می‌دهد که تغییر مکانِ سطحِ زمین در هر فرکانس به نرخ لغزش در همان فرکانس مربوط است، این مهم به دلیل اینکه قضیه‌ی معرّف، یک انتگرال پیچش در حوزه‌ی زمان است رخ می‌دهد. به این دلیل می‌توان داده‌های لرزه‌ای در هر فرکانس را، با استفاده از تکنیک حل معکوس، به طیف تابع نرخ لغزش در فرکانس متناظر برگرداند و سپس با استفاده از تبدیل معکوس فوریه، این تابع را از حوزه‌ی فرکانس به حوزه‌ی زمان آورد. فَن و همکاران [۲۰۱۴] با استفاده از مبانی فوق، روشی را برای حل معکوس در حوزه‌ی فرکانسی ارائه کردند که در آن مدلی که دارای بیشینه‌ی درستنمایی[۷۰] است را با استفاده از یک الگوریتم برنامه‌نویسی درجه ۲[۷۱] به دست می‌آورند. این روش بر روی داده‌های مثال معیار SIV-inv1 اعمال گردید و توانست از سایر روش‌های حل معکوس موفق تر باشد و حائز بالاترین امتیاز در رتبه‌بندی وبسایت SIV (بخش ۲-۱۱) گردد.

روش ارائه شده در این رساله نیز یک روش حل معکوس در دامنه‌ی فرکانسی است و بر اساس مبانی روش [فَن و همکاران، ۲۰۱۴] توسعه یافته است.

۲-۱۰-۴ روش‌های مرسوم منظّم‌سازی لغزش سینماتیکی

اگرچه رابطه‌ی مستقیم در روش‌های مختلف حل معکوس سینماتیکی یکسان است، لیکن روش‌های مختلف منظّم‌سازی و قیود متفاوت اعمال شده بر مسئله موجب تفاوت روش‌ها و نتایج آنهاست. روش منظّم‌سازی تیخونوف، رایج‌ترین راه حل منظّم‌سازی در روش‌های مرسوم حل معکوس سینماتیکی به حساب می‌آید، هر چند که در روش‌های جدیدتر که در سال‌های اخیر مطرح شده‌اند، استفاده از مفاهیم آماری و روش حل معکوس بیزی گسترش فراوانی پیدا کرده است.

در روش اولسون و اپسل [۱۹۸۲] استفاده از روش منظّم‌سازی تیخونوف در حل معکوس خطی و فیلتر کردن مقادیر ویژه‌ی کوچک به خوبی تشریح شده است و نویسندگان پایداری جواب را با استفاده از این الگوریتم، مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند. روش مشابهی برای منظّم‌سازی توسط هارتزل و هیتون [۱۹۸۳] ارائه شده است. در

[70] Maximum likelihood
[71] Quadratic Programming

روش‌های فوق‌الذکر، جواب حدأقل مربعات برای معادله‌ی ماتریسی ۲-۴۸ به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{d^o} \\ ۰ \end{bmatrix} \tag{۲-۴۸}$$

که در آن $\mathbf{G}$، رابطه‌ی مستقیم به دست آمده از معادله‌ی ۲-۴۶ است و $\mathbf{I}$ ماتریس همانی است. λ نیز پارامتر میرا کننده در روش منظم‌سازی تیخونوف را نشان می‌دهد. در روش ارائه شده توسط داس و کاستروف [۱۹۹۰] روش خلّاقانه‌ای برای منظم‌سازی به کار برده شده است، بدین صورت که تطابق مناسب داده‌های شبیه‌سازی شده و یافتن حدأقل خطا، با اعمال سه قید بر روی پارامترهای مدل حاصل شده است. این سه قید عبارتند از: ۱) پَس‌لغزش[۷۲] (بخش ۶-۶-۲) مجاز نیست، ۲) قید علّیت[۷۳] یعنی پیش از رسیدن جبهه‌ی گسیختگی به یک نقطه، سرعت لغزش در آن نقطه صفر باشد، و ۳) ممان لرزه‌ای حاصل از حل معکوس، با ممان ناشی از حل تانسور تنش برابر باشد. به بیان دیگر:

$$\begin{aligned} &\dot{u}(\boldsymbol{\xi},t) \geq ۰ \quad \text{به ازای تمامی } (\boldsymbol{\xi},t) \\ &\dot{u}(\boldsymbol{\xi},t) = ۰ \quad \text{پیش از رسیدن گسیختگی } t < T(\boldsymbol{\xi}) \\ &\int_۰^\infty \mathrm{d}t \int\int_\Gamma \mu(\boldsymbol{\xi})\dot{u}(\boldsymbol{\xi},t)\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma} = M_۰ \end{aligned} \tag{۲-۴۹}$$

و همراه با شرایط فوق، قدر مطلق نُرم باقیمانده مینیمم شود.

$$\mathbf{r} = |\mathbf{d^o} - \mathbf{Gm}| \tag{۲-۵۰}$$

به یافتن مقدار مینیمم رابطه‌ی ۲-۵۰ تحت قیود ۲-۴۹ ،مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی گفته می‌شود.

با توسعه‌ی روش‌های حل معکوس بیزی، کوتون و کامپیو [۱۹۹۵] با فرمول‌بندی رابطه‌ی ۲-۴۶ در دامنه‌ی فرکانسی و فرض توزیع نرمال چند متغیره برای عدم قطعیت داده‌ها و توزیع احتمال پیشین، با استفاده از رابطه‌ی

[72] Back-slip
[73] Causality Constraint

۲-۴۲ و یافتن مقدار مینیمم برای آن، یک روش حل معکوس ارائه دادند. با افزایش قدرت محاسباتی رایانه‌ها استفاده از روش‌های بهینه‌یابی عمومی هم در حل معکوس چشمه‌ی لرزه‌زا کاربرد پیدا کردند. در روش لیو و آرچولتا [۲۰۰۴] با استفاده از روش شبیه‌سازی تبرید، برای تابع خطای ۲-۵۱ مقدار حدأقل را به دست آوردند.

$$Cost(\mathbf{m}) = \sum_{1}^{N_d} W_d\left(1 - \frac{2\sum_{t_b}^{t_e}(u_o(t)u_s(t))}{\sum_{t_b}^{t_e} u_o^2(t) + \sum_{t_b}^{t_e} u_s^2(t)}\right) + W_c(\text{constraints}) \qquad (۲-۵۱)$$

که در آن $u_o(t)$ داده‌ی مشاهده شده بر روی سطح زمین، $u_s(t)$ داده‌ی شبیه‌سازی شده و (t_b, t_e) بازه‌ی زمانی انتخاب داده‌ها برای استفاده در حل معکوس است. W_d وزن مورد استفاده برای داده‌ها و W_c وزن مورد استفاده برای قیود مسئله است. در این روش، دو قید در نظر گرفته شده است که یکی از آنها حدأقل بودن اختلاف لغزش میان زیرگسل‌های مجاور بوده و دیگری حدأقل ممان کل بر روی گسل است.

در حل معکوس سینماتیکی، استفاده از روش حل معکوس بیزی به همراه نمونه‌برداری MCMC از چگالی احتمال پسین برای اولین بار توسط مونلی و مای [۲۰۰۸] ارائه شد. روش مذکور از شیوه‌ی گسسته‌سازی لیو و آرچولتا [۲۰۰۴] استفاده می‌کند.

فَن و همکاران [۲۰۱۴] با استفاده از روش بیزی و با استفاده از قیود متعدد، همچون حدأقل نمودن نُرم دوم لاپلاسین لغزش، مقید کردن ممان لرزه‌ای به یک ممان از پیش تعیین شده و صفر نمودن مقادیر لغزش در مرز صفحه‌ی گسلی می‌باشد. تناسب بین قیود فوق با استفاده از وزن دهی نسبی به آنها، همانند روش منظم‌سازی تیخونوف انجام شده و با استفاده از منحنی L-curve پارامتر میراکننده انتخاب می‌گردد. پس از تعیین پارامتر میرا کننده، تابع مدل مقدار با استفاده از روش برنامه ریزی درجه ۲[74] [بوید و واندنبرگه، ۲۰۰۴] صورت می‌پذیرد.
گالوویچ و همکاران [۲۰۱۵] با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف و قید لغزش حدأقل، ممان لرزه‌ای از پیش تعیین شده و با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف، روشی برای حل معکوس در حوزه‌ی زمان ارائه دادند.

۲-۱۱ پروژه‌ی SIV

با گسترش روش‌های شبیه‌سازی و حل معکوس، این سوال مطرح شد که کدام یک از روش‌های موجود از دیگر روش‌ها قدرتمندتر است و می‌تواند تابع چشمه را با خطای کمتری نسبت به روش‌های دیگر به دست آوَرَد. این مهم

[74] Quadratic programming

نیازمند وجود یک مثال زلزله‌ی مصنوعی است، به نحوی که در آن تابع چشمه‌ی درست را داشته باشیم و بتوانیم جوابی که از حل معکوس به دست می‌آید را با جواب درست مقایسه کنیم. این سوال با توسعه‌ی روش‌های عددی شبیه‌سازی گسترش ترَک همراه شد، به نحوی که از حدود سال ۲۰۰۰ میلادی این امکان فراهم گردید که با مدلسازی وضعیت تنش اولیه در یک جسم جامد الاستیک، و شبیه‌سازی رفتار لغزش-افت تنش در آن، نحوه‌ی گسترش ترَک را مدل‌سازی کرد. در این راستا، مای و همکاران [۲۰۱۶] با ارائه‌ی سه مثال معیار[۷۵] و راه‌اندازی یک وبسایت (http://equake-rc.info/siv/)، از پژوهشگران درخواست کردند تا با روش‌های مختلف به حل مثال‌های معیار SIV بپردازند. این وبسایت ابزار مقایسه و رتبه بندی نتایج را در اختیار کاربران قرار می‌دهد که می‌توان با استفاده از آنها در مورد کارآمدی روش‌ها تصمیم گرفت. در این رساله، به منظور کنترل کیفیت کارآمدی روش پیشنهادی و نتایج حل معکوس از مثال SIV-inv1 استفاده کرده‌ایم که در بخش (۴-۴) به تشریح این مثال می‌پردازیم.

[75] Benchmark

فصل ۳

روش تقریب تابع فازی و شبکه‌ی ANFIS

۳-۱ مقدمه

در فصل گذشته با روش‌های مختلف گسسته‌سازی تابع لغزش بر روی یک گسل، که به منظور حل عددی انتگرال پیوسته‌ی قضیه‌ی معرّف ۱-۲ صورت می‌پذیرد، آشنا شدیم. دیدیم که در روش مرسوم گسل‌های محدود، تابع لغزش با استفاده از زیرگسل‌هایی با لغزش ثابت در مکان تقریب زده می‌شود (بخش ۲-۱۰-۱) و در این روش، تعداد پارامترهای دخیل در تقریب مکانی تابع لغزش، به تعداد زیرگسل‌هایی که سطح گسل را می‌پوشانند وابسته است. عموماً تعداد زیرگسل‌های زیادی برای پوشاندنِ سطح گسلِ مسبب یک زمین‌لرزه‌ی بزرگ نیاز است. ایده‌ی اصلی این رساله، جایگزین کردن روش تقریب تابعی مرسوم، با روشی است که بتواند با تعداد پارامترهای کمتری، تابع هدف را تقریب بزند.

همچنان که در فصل ۲ اشاره شد، بدوضع بودن مسئله معکوس به مقادیر تکینِ کوچک آن بستگی داشته و طی فرآیند گسسته‌سازی، مقادیر تکین مسئله‌ی پیوسته، شامل مقادیر تکینِ کوچک، به فضای گسسته منتقل می‌گردند. اینکه مقادیر تکینِ کوچک تا چه میزان در مسئله‌ی گسسته وجود داشته باشند، به روش گسسته‌سازی فضای مدل بستگی دارد و به واسطه‌ی توابع پایه‌ای که مدل با استفاده از آنها بسط داده شده است، از مقادیر تکین نمونه برداری می‌شود.

در بخش ۲-۴ گفتیم که با کوچکتر شدن مقادیر تکین μ_i، نوسانات توابع ویژه‌ی u_i و v_i (رابطه‌ی ۲-۱۳) بیشتر می‌شود و می‌توان گفت که جزئیات ریز و ظریف تابع مدل، توسط توابع ویژه‌ی مرتبط با مقادیر ویژه‌ی

کوچک، که ناپایدار کننده‌ی حل معکوس هستند، ساخته می‌شوند. اگر کم کردن تعداد پارامترهای مدل در یک روش تقریب تابعی به نحوی باشد که بتوان از تقریب جزئیات کاست و فقط کلیات مدل را تقریب زد، آنگاه می‌توان انتظار داشت که با استفاده از این روش، تقریبِ مدل و گسسته‌سازی رابطه‌ی مستقیم بر مبنای آن، فقط از مقادیر تکینِ بزرگ مسئله نمونه برداری می‌شود و از میزان بدوضعیِ مسئله کاسته خواهد شد.

روش تقریب تابعی فازی دارای چنین خاصیتی است. از منظر تئوری تقریب[1]، روش‌های تقریب تابع فازی، تقریب زننده‌های یکنواختی[2] هستند که قابلیت تقریب هر تابع پیوسته‌ای را تا هر درجه‌ی دقت دلخواهی دارند [باکلی، ۱۹۹۲؛ کاسکو، ۱۹۹۴؛ وَنگ، ۱۹۹۲؛ وَنگ و مِندل، ۱۹۹۲]. در این روش‌ها، تقریب با میانگین گیریِ تکه‌های فازی[3] که با یکدیگر همپوشانی دارند، صورت می‌پذیرد.

در نظریه‌ی تقریب خطی، یک تابع هدف را می‌توان با استفاده از بسط توابع معلوم با مقادیر وزن مجهول به دست آورد. برای مثال در تقریب یک تابع با استفاده از سری فوریه، هر تابع تناوبی را می‌توان از جمع توابع مثلثاتی معلوم (توابع سینوس و کسینوس)، که با مقادیر مجهول ضرایب فوریه وزن‌دهی شده‌اند، به دست آورد. این مقادیر مجهول را می‌توان با تصویر کردن تابع هدف بر روی توابع پایه‌ی معلوم به دست آورد. از سوی دیگر، در روش‌های غیرخطی تقریب تابعی، فقط فرم تابعیِ توابع پایه از پیش معلوم است و توابع پایه‌ی نهایی در فرآیند بهینه‌سازی خطای تقریب به دست می‌آیند. به عبارت دیگر، در روشهای غیر خطی، هم ضرایب بسط تابعی و هم پارامترهای توابع پایه، هر دو مجهول هستند. به روش‌های تقریب تابعی غیرخطی، روش‌های تطبیقی[4] نیز گفته می‌شود.

در روش‌های تطبیقی فازی[5] به منظور تقریب توابع پیوسته، در مقیاس کلی از تکه‌های فازی همپوشاننده میانگین‌گیری می‌شود و در مقیاس محلی، تکه‌های فازی توسط شبکه‌های عصبی[6] تنظیم می‌شوند [کاسکو، ۱۹۹۴]. اصلی‌ترین مزیّت این روش تقریب تابعی این است که با استفاده از آن می‌توان هر تابع پیوسته‌ای را به صورت تطبیقی تقریب زد. از میان روش‌های تطبیق تابعی فازی، جَنگ و سان [۱۹۹۵]، سیستم فازی تاکاگی و سوجینو [۱۹۸۳] را در قالب شبکه‌های عصبی پیاده‌سازی کرده و سیستم تطبیقی فهمِ فازی بر مبنای شبکه‌ی عصبی ANFIS[7] را معرفی نمودند. در ادبیات روش ANFIS به فرآیند بهینه‌یابی و یافتن پارامترهای بسط تابعی، فرآیند آموزش دادن[8]

[1] Approximation Theory
[2] Uniform Approximator
[3] Fuzzy Patches
[4] Adaptive Approximation methods
[5] Addaptive Fuzzy Approaches
[6] Neural networks
[7] Adaptive Network-based Fuzzy Inference System
[8] Learning Procedure

گفته می‌شود.

در این فصل به مبانی تقریب تابعی با استفاده از ANFIS می‌پردازیم و سپس در فصل آینده روش حل معکوس پیشنهادی این رساله را ارائه خواهیم نمود.

۳-۲ اصول تقریب تابعی

در تئوری تقریب، یک تابع کلی با استفاده از یک حاصل جمع وزن‌دار از توابع ساده و مقدماتی، همچون توابع چندجمله‌ای، توابع نمایی یا توابع مثلثاتی به دست می‌آیند. سری فوریه، بسط تیلور و روش اجزای محدود[۹] همگی نمونه‌هایی از تقریب تابعی با استفاده از توابع ساده هستند [کوهِن، ۲۰۰۳]. تقریبِ یک تابع کلی $f(\xi)$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(\xi) \approx \tilde{f}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(\xi) \qquad (۳-۱)$$

، که در آن $\tilde{f}(\xi)$ تابع تقریب زده شده است، $\phi_i(\xi)$ توابعِ پایه و c_i ضرایب تقریب را نشان می‌دهند. مقدار خطای تقریب با استفاده از تابع خطای[۱۰] زیر محاسبه می‌شود.

$$Cost = ||f - \tilde{f}||_p \qquad (۳-۲)$$

در رابطه‌ی ۳-۲، $||\cdot||_p$ نشان‌دهنده‌ی نُرم pاُم است که معمولاً $p = ۲$ معادل با نُرم اقلیدسی L2 فرض می‌گردد. اگر توابع پایه‌ی تقریب، $\phi_i(\xi)$ مستقل از تابع هدف $f(\xi)$ باشند، به این مسئله تقریب خطی می‌گوییم. بسط سری فوریه[۱۱] یکی از مثال‌های تقریب خطی است. در روش فوریه اهمیتی ندارد که چه تابع هدفی تقریب زده می‌شود، توابع پایه همواره توابع هارمونیک مختلط هستند. در تقریب غیرخطی، یا تقریب تطبیقی، توابع پایه‌ی تقریب، $\phi_i(\xi)$ به تابع هدف $f(\xi)$ وابسته هستند. در تقریب غیر خطی، با توجه به اینکه امکان تغییر شکل توابع پایه هم وجود دارد، می‌توان به خطاهای کمتر (رابطه‌ی ۳-۲) و تقریب‌های دقیق‌تری دست یافت. در هر دو روش خطی و غیرخطیِ تقریب، میزان کاهش خطا به میزان هموار بودن تابع هدف بستگی دارد [کوهِن، ۲۰۰۳]. روش

[9] Finite element method

[۱۰] در ادبیات تئوری تقریب، به تابعی که خطا را اندازه‌گیری می‌کند تابع هزینه نیز گفته می‌شود

[11] Fourier Series

تقریب تابع فازی، یکی از انواعِ روش‌های تقریب تابع تطبیقی است.

۳-۲-۱ مجموعه‌های فازی و توابع عضویت فازی

یک مفهوم اساسی در توسعه‌ی روش‌های تقریب تابع فازی، مفهوم مجموعه‌ی فازی است. یک مجموعه‌ی فازی، مجموعه‌ای است که حد و مرز مشخصی ندارد، بر خلاف مجموعه‌های کلاسیک که حد و مرز آنها کاملاً مشخص است. در مجموعه‌های کلاسیک، یک عنصر خاص، یا عضو مجموعه هست و یا عضو مجموعه نیست؛ امّا در مجموعه‌های فازی، یک عنصر خاص هم عضو مجموعه هست و هم عضو مجموعه نیست. عدم قطعیت تعلّق یک عنصر به یک مجموعه، توسط تابع عضویت فازی[۱۲] تعریف می‌شود. تابع عضویت فازی به هر یک از عناصر ورودی، عددی بین ۰ و ۱ (شامل خودِ ۰ و ۱) منتسب می‌کند که عدد ۰ نشان‌دهنده‌ی عدم تعلّق عنصر ورودی به مجموعه و عدد ۱ نشان‌دهنده‌ی تعلّقِ کاملِ عنصر ورودی به مجموعه است. به عنوان مثال برای مجموعه‌ی $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A} = \{(x, \mu_{\mathbb{A}})|x \in \mathbb{X}\} \tag{۳-۳}$$

، که در ۳-۳، $\mu_{\mathbb{A}}$ نشان‌دهنده‌ی تابع عضویت و $\mathbb{X}$ نشان‌دهنده‌ی حوزه‌ی عناصر کاندید عضویت در مجموعه‌ی $\mathbb{A}$ است.

از نظریه‌ی کلاسیک مجموعه‌ها بخاطر داریم که با کمک عملگرهای اجتماع (یا) و اشتراک (و) می‌توان مبانی علمِ منطق[۱۳] را بسط داد و به استدلال منطقی پرداخت . علم منطق در مورد مجموعه‌های فازی هم قابل کاربرد است و با کمک تابع عضویت یک مجموعه‌ی فازی می‌توان عملگرها متداول در نظریه‌ی مجموعه‌ها، همچون زیر مجموعه بودن، اجتماع و اشتراک را توسعه داد. به عنوان مثال، $A \subseteq B$ است اگر و آنگاه اگر $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$. چنانچه حوزه‌ی تعریف مجموعه‌ی $\mathbb{A}$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) باشد، توابع عضویت را می‌توان به شکل توابع شناخته شده‌ی تحلیلی تعریف کرد. به عنوان مثال تابع گاوسی[۱۴] یکی از توابعی است که به عنوان تابع عضویت مورد استفاده قرار می‌گیرد (رابطه‌ی ۳-۴).

$$MF(x; \sigma, c) = \exp\left(-(\frac{x-c}{۲\sigma})^۲ \right) \tag{۴-۳}$$

[12] Fuzzy membership function
[13] Logic
[14] Gaussian

در عین حال، در ادبیات منطقِ فازی انواع مختلفی از توابع عضویت همچون تابع عضویت مثلثی[۱۵]، تابع عضویت ذوزنقه‌ای[۱۶] و تابع عضویت زنگوله‌ای[۱۷] وجود دارد [پیگات، ۲۰۱۳]. لازم به ذکر است که پیاده‌سازی عملیات منطقی بر روی مجموعه‌های فازی با هر یک از این توابع عضویت امکان پذیر است.

۳-۲-۲ قوانین اگر-آنگاه فازی

قوانین اگر-آنگاه فازی[۱۸] به صورت زیر بیان می‌شوند:

اگر $x = A$ آنگاه $y = B$.

در این قوانین، به قسمت $x = A$، قسمت فرض[۱۹] و قسمت $y = B$ قسمت نتیجه[۲۰] نامیده می‌شوند. این قوانین منعکس کننده‌ی عدم قطعیت گوینده از مفاهیم مبهم A و B است و آن را به طور مختصر با $A \to B$ هم نمایش می‌دهند. این قوانین قابلیت استدلال در فضای عدم قطعیت مفاهیم را به ما می‌دهند. به بیان دیگر، استدلال فازی[۲۱] عبارتست از حصول یک نتیجه، از روی یک سری قوانین اگر-آنگاهِ فازی. به عنوان مثال:

فرض ۱	امروز هوا گرم است
قانون ۱	در تابستان هوا گرم است
نتیجه	امروز، تابستان است

در این مثال مفاهیمی همچون هوای گرم و فصل تابستان را می‌توان به صورت مجموعه‌های فازی در نظر گرفت و بر مبنای قوّت[۲۲] آن‌ها، قوّت نتیجه را به دست آورد. پرداختن به جزئیات روش‌های مختلف استدلال فازی از هدف این رساله‌ی دکترا خارج است، امّا این جزئیات به طور کامل در کتاب‌های مرجع منطق فازی همچون [جَنگ و همکاران، ۱۹۹۷؛ زاده و علیف، ۲۰۱۸] یافت می‌شوند.

[15] Triangular
[16] Trapezoidal
[17] Bell
[18] Fuzzy if-then rules (Fuzzy Modus-ponens)
[19] Premise
[20] Conclusion
[21] Fuzzy reasoning
[22] Strength

۳-۲-۳ سیستم‌های استنتاج فازی و روش تقریب تابعی فازی

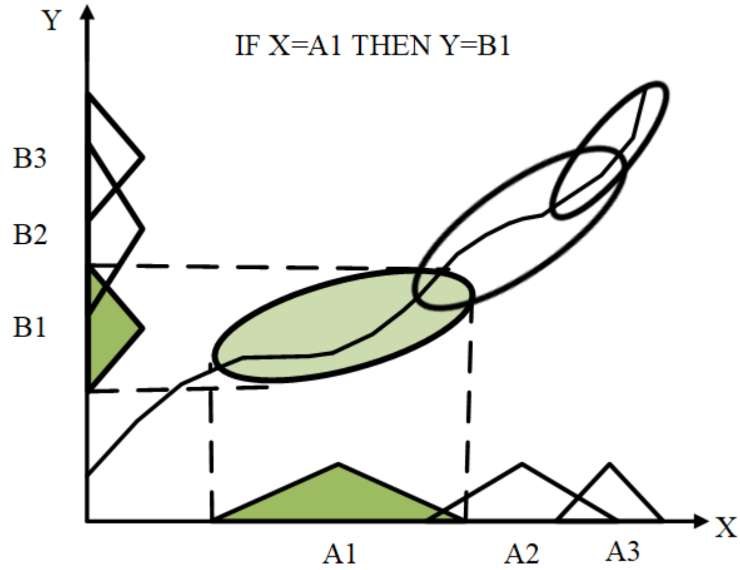
سیستم‌های استنتاج فازی[۲۳] بر مبنای قوانین اگر-آنگاه فازی (بخش ۳-۲-۲) توسعه یافته‌اند و می‌توانند با استفاده از محاسبات ریاضی، قابلیت استدلال و استنتاج را پیاده‌سازی کنند. در این سیستم‌ها، مفاهیم قطعی توسط یک الگوریتم فازی‌ساز[۲۴] به حالت فازی تبدیل می‌شوند. در مرحله‌ی بعدی یک مجموعه‌ی قوانین فازی وجود دارد که ورودی فازی شده را با توجه به هر قانون به یک نتیجه‌ی فازی تبدیل می‌کند. در آخرین مرحله، با استفاده از یک غیرفازی‌ساز[۲۵] خروجی‌های فازی به نتایج واقعی تبدیل می‌شوند و نتیجه‌ی استنتاج به دست می‌آید. سه تا از شناخته شده ترین سیستم‌های کلاسیک استنتاج فازی عبارتند از سیستم سوکاموتو[۲۶] [سوکاموتو، ۱۹۷۹]، سیستم مَمدانی[۲۷] [مَمدانی و اصیلیان، ۱۹۷۵] و سیستم سوجینو[۲۸] [سوجینو و کانگ، ۱۹۸۸].

هنگامی که ورودی و خروجی به سیستم‌های استنتاج فازی، اعداد باشند، این سیستم‌ها به روش‌های تقریب تابعی تبدیل می‌شوند، به عبارت دیگر یک تابع را هم می‌توان به صورت $f : X \to Y$، یا مجموعه از قوانین اگر-آنگاه فازی بیان کرد [برای مثال بنگرید به دیکرسون و کاسکو، ۱۹۹۶]. به سیستمی فازی که خروجی مجموعه‌ای از قوانین فازی را با یکدیگر جمع کرده و از قوانینی که همپوشانی[۲۹] دارند، میانگین‌گیری می‌کند (شکل ۳-۱) سیستم فازی افزایشی[۳۰] می‌گویند [برای مثال کاسکو، ۱۹۹۴]، این سیستم‌ها قابلیت تقریب توابع پیوسته را تا هر دقت دلبخواهی، با استفاده از تعداد نامتناهی[۳۱] از توابع فازی دارند.

۳-۳ سیستم عصبی استنتاج فازی تطبیق پذیر ANFIS

جَنگ [۱۹۹۳] با ترکیب سیستم استنتاج فازی تاکاگی و سوجینو [۱۹۸۳] و شبکه‌های عصبی، سیستم عصبی استنتاج فازی تطبیق‌پذیر[۳۲] (ANFIS) را پدید آورد. شبکه‌های عصبی، مجموعه‌ای از گره‌های ساده هستند که قابلیت انجام عملیات مقدماتی حسابی در آنها پیاده‌سازی شده است. هر یک از گره‌ها توانایی دریافت ورودی از

[23] Fuzzy inference system (FIS)
[24] Fuzzification
[25] Defuzzifier
[26] Tsukamoto
[27] Mamdani
[28] Sugeno
[29] Overlap
[30] Additive fuzzy rules
[31] Finite number
[32] Adaptive neuro-fuzzy inference system

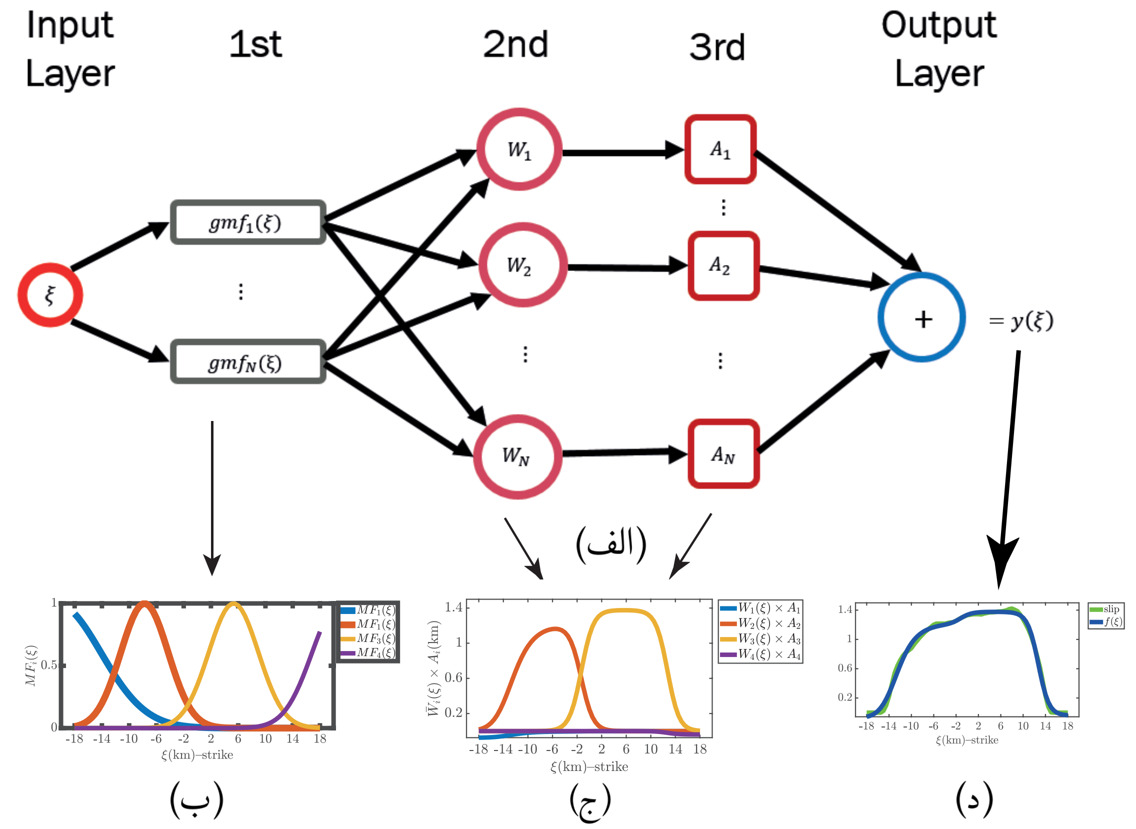


شکل ۳-۱: یک نمونه از سیستم‌های افزایشی فازی [دیکرسون و کاسکو، ۱۹۹۶] که در آن هر یک از قوانین اگر-آنگاه فازی توسط یک تکّه‌ی بیضی شکل تعریف شده است، خروجی این سیستم، حاصل جمع خروجی همه قوانین تشکیل دهنده سیستم است و در نواحی همپوشاننده از خروجی قوانینی که یکدیگر را پوشش داده‌اند میانگین‌گیری می‌شود.

گره‌های لایه‌ی ماقبل خود، انجام عملیات ساده‌ی ریاضی بر روی این ورودی‌ها و ارسال خروجی به گره‌های بعد از خود را دارد. در هریک از گره‌های شبکه‌ی عصبی تعداد پارامتر وجود دارد که خروجی شبکه‌ی عصبی توسط مقدار این پارامترها تنظیم می‌شود. مقدار پارامترهای شبکه‌ی عصبی در فرآیندی به نام آموزش[۳۳] تعیین می‌گردد. آموزش پذیری اصلی ترین ویژگی شبکه‌های عصبی است. ترکیب شبکه‌های عصبی و سیستم‌های فازی، دو قابلیت مهم مغز انسان یعنی فهمیدن و آموزش پذیری را خواهد داشت و سیستم انفیس می‌تواند با داده‌های بیشتر، با دقت خوبی رفتار ورودی - خروجی یک سیستم را پیش‌بینی کند و به داده‌های آموزشی نزدیک شود.

شکل ۳-۲، معماری یک سیستم انفیس با یک ورودی، ξ را نشان می‌دهد. در این شکل حوزه‌ی ورودی سیستم به N دسته[۳۴]، توسط توابع عضویت فازی تقسیم شده است. هر یک از این دسته‌ها دارای یک قانون اگر-آنگاه فازی مخصوص به خود، بر اساس جدول (۳-۱) است. برای تعیین بهترین پارامترهای توابع عضویت در هر دسته، به نحوی که بهترین انطباق با کمترین میزان خطا (رابطه‌ی ۳-۲) وجود داشته باشد، از آموزش شبکه عصبی استفاده می‌کنیم.

[33] Training
[34] Sub-domain



شکل ۳-۲: نمونه‌ای از شبکه‌ی عصبیِ انفیس با فقط یک ورودی و یک خروجی. (الف) معماریِ انفیس برای یک ورودی/یک خروجی. (ب) گسسته‌سازیِ حوزه‌ی ورودی (ξ) با استفاده از توابع عضویت فازی، در این مثال از ۴ تابع عضویت فازی استفاده شده است. (ج) خروجی هر یک از قوانین فازی توسط توابع عضویت خروجی که در سیستم انفیس برابر $\bar{W}_i(\xi) \times A_i$ می‌باشد. (د) خروجی شبکه، $y(\xi)$ (خط آبی رنگ) که تقریب شبکه از داده‌های آموزشی (خط سبز) است.

جدول ۳-۱: قوانین اگر-آنگاهِ فازی برای شبکه‌ی انفیس با یک متغیر ورودی، (ξ)، و خروجی ثابت (A_i).

اگر $\xi \in D_1$	آنگاه خروجی برابر A_1 است.
$\vdots$	$\vdots$
اگر $\xi \in D_N$	آنگاه خروجی برابر A_N است.

لایه‌ی ورودی انفیس، پارامتر ورودی ξ را به همه‌ی گره‌های لایه‌ی اول ارسال می‌کند. در لایه‌ی اول، میزان تعلّق پارامتر ورودی به هر یک از قوانین فازی (دسته‌های یا زیرحوزه‌های دامنه‌ی ورودی تابع) توسط توابع عضویت پیاده‌سازی شده تعیین می‌شود. در این رساله، تابع عضویت مورد استفاده‌ی ما، تابع عضویت گاوسی است که پیشتر در رابطه‌ی ۳-۴ به معرفی آن پرداختیم. دلیل این انتخاب در فصل آینده (بخش ۴-۲) تشریح خواهد شد. تابع عضویت برای حوزه‌ی D_i، gmf_{D_i} برابر است با:

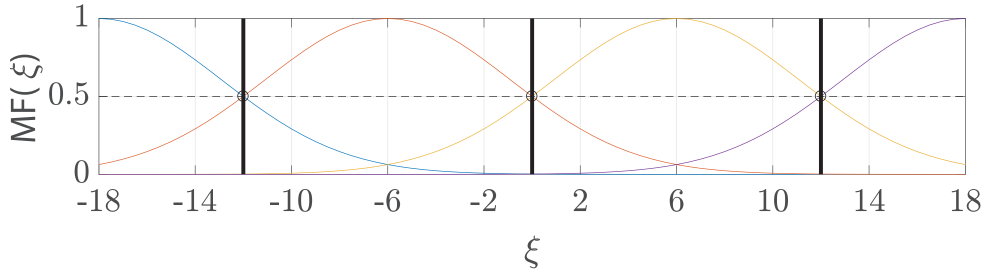
$$gmf_{D_i}(\xi, \sigma_i, \mu_i) = \exp\left(-(\frac{x-\mu_i}{2\sigma_i})^2 \right) \qquad (۳-۵)$$

برای تعیین مقادیر اولیه‌ی پارامترهای μ_i و σ_i در شبکه‌ی انفیس روش‌های متنوعی از قبیل تقسیم بندی شبکه‌ای[۳۵]، تقسیم بندی درختی[۳۶] و تقسیم‌بندی پراکنده[۳۷] وجود دارد که به تقسیم بندی دامنه‌ی ورودی سیستم فهمِ فازی می‌پردازند و می‌توان به کمک آن فرآیند آموزشِ شبکه را آغاز نمود. در روش پیشنهادی این رساله، از روش تقسیم‌بندی شبکه‌ای استفاده می‌شود. در این روش برای هر متغیر ورودی[۳۸] تعدادی تابع عضویت در نظر گرفته می‌شود، تعداد کل نواحیِ تقسیم‌بندی از حاصل‌ضرب تعداد توابع عضویت برای هر تَک متغیر به دست می‌آید. مشکل این روش این است که اگر تعداد متغیرهای ورودی زیاد باشد، یا تعداد تقسیم‌بندی‌ها زیاد شود، شبکه‌ی انفیس به شدت متراکم[۳۹] خواهد شد و تعداد عملیات لازم برای محاسبه‌ی خروجی بسیار زیاد می‌شود که موجب کند شدن فرآیند آموزش انفیس می‌گردد.

بر اساس [جَنگ، ۱۹۹۳] مراحل تقسیم‌بندی ورودی در روش تقسیم‌بندی شبکه‌ای به شرح زیر است:

- ابتدا، دامنه‌ی متغیر ورودی به N المان کلاسیک (غیر فازی) تقسیم می‌شود
- در المان‌های داخلی، یک تابع عضویت منحصربفرد که مقدار ماکزیمم عضویت آن (۱) به مرکز المان کلاسیک مربوط است، به هر المان منتسب می‌شود. در مورد المان اول و آخر، مقدار ماکزیمم عضویت به لبه‌ی المان‌ها منسوب می‌شود.
- نقاط واقع بر روی مرز المان‌های کلاسیک به طور مساوی به دو دسته‌ی فازی مجاور هم تعلق دارند و مقدار

[35] Grid partitioning
[36] Tree partitioning
[37] Scatter Partitioning
[38] دقت کنید که یک سیستم فازی ممکن است بیش از یک ورودی داشته باشد، در بخش بعد سیستم انفیس برای دو ورودی تشریح خواهد شد.
[39] Dense



شکل ۳-۳: نمونه‌ای از تقسیم‌بندی شبکه‌ای برای مقدار دهی اولیه به توابع عضویت فازی. متغیر ورودی ξ، به ۴ دسته‌ی کلاسیک (غیر فازی) تقسیم شده است که مرز ما بین این دسته‌ها با خط مشکی ضخیم مشخص شده است. در المان‌های داخل حوزه مقدار تابع عضویت در مرکز هر دسته برابر ۱ است، در اولین و آخرین المان، بیشینه‌ی مقدار عضویت مربوط به مرز بیرونی حوزه است. مقدار تابع عضویت در نقاط مرزی بین دو المان کلاسیک، مساوی و برابر ۰٫۵ است.

عضویت آنها به هر دسته برابر ۰٫۵ است.

شکل (۳-۳) یک نمونه از تقسیم‌بندی شبکه‌ای را نشان می‌دهد. با استفاده از دستورالعمل فوق و شکل (۳-۳) به آسانی می‌توان پارامترهای توابع عضویت را برای تابع گاوسی تعیین کرد، چنانچه عرض حوزه‌ی ورودی برابر L باشد، فاصله‌ی بین مراکز توابع فازی برابر با $\frac{L}{N-۱}$ است. در نقطه‌ی مرزی بین دو دسته، فاصله تا مرکز دسته برابر با $\frac{L}{۲(N-۱)}$ می‌باشد، بنابراین:

$$\exp\left(-\frac{\left(\frac{L}{۲(N-۱)}\right)^۲}{۲\sigma_i^۲}\right) = ۰٫۵ \tag{۳-۶}$$

بنابراین مقدار σ_i اولیه برابر است با:

$$\sigma_i^{\circ} = \left(\frac{-۱}{۸ \times \ln ۰٫۵}\right)^{۰٫۵} \frac{L}{N-۱} \times \approx ۰٫۴۲۴۶۶ \times \frac{L}{N-۱} \tag{۳-۷}$$

نقشِ توابع عضویت در شبکه‌های نوروفازی (همچون انفیس) همانند نقش مِش‌بندی در سایر روش‌های عددی همچون روش اجزای محدود است. خروجی توابع عضویت فازی از لایه‌ی اول، $gmf_{D_i}(\xi, \sigma_i, \mu_i)$، به لایه‌ی دوم شبکه‌ی انفیس ارسال می‌شود. خروجی گره‌های این لایه، میزان قوّت هر یک از قانون‌های فازی (بخش ۳-۲-۲) است. در ادبیات انفیس خروجی لایه‌ی دوم را با $\bar{W}_i$ نشان می‌دهند و این عدد با نرمال کردن توابع عضویت،

خروجی لایه‌ی اول، محاسبه می‌شود (رابطه‌ی ۳-۸).

$$\bar{W}_i(\xi) = \frac{gmf_{D_i}(\xi)}{\sum_{i=1}^{N} gmf_{D_i}(\xi)} \tag{۳-۸}$$

توابع $\bar{W}_i(\xi)$ نقش توابع پایه‌ای را بازی می‌کنند که برای تشکیل خروجی سیستم به کار می‌رود. لایه‌ی سوم، مقادیر $\bar{W}_i(\xi)$ را با وزن‌های ثابت A_i ترکیب می‌کند. به عبارت دیگر قوّت استدلال نُرمال شده‌ای که از خروجی لایه‌ی دوم تعیین می‌شود، در مقدار خروجی هر قانون فازی ضرب شده و میزان خروجی آن قانون را می‌سازد. در لایه‌ی خروجی، نتایج همه‌ی قوانین با هم جمع می‌شوند تا از سیستم فازی افزایشی انفیس، خروجی آن را به دست بیاوریم. برای مثالی که در این بخش به کار بردیم، این خروجی برابر است با:

$$y(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \bar{W}_i(\xi) A_i \tag{۳-۹}$$

و یا، به صورت برداری:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{W}}\mathbf{A} \tag{۳-۱۰}$$

۳-۳-۱ ANFIS برای بیش از یک متغیر ورودی

روش تقریب تابعی ANFIS را می‌توان برای تقریب هر تابعی از تعداد دلخواه متغیر مستقل به کار برد. این کار به آسانی و با اضافه کردن یک گره‌ی جدید در لایه‌ی ورودی برای متغیر مستقل جدید انجام می‌شود. شکل (۳-۴) معماری شبکه‌ی انفیس را به منظور تقریب تابعی از دو متغیر مستقل ξ و η نشان می‌دهد. از این شبکه برای تقریب تغییرات لغزش در دو جهت امتداد گسل (ξ) و شیب گسل (η) استفاده می‌کنیم.

همانند شبکه‌ی انفیس با یک ورودی، وظیفه‌ی لایه‌ی اول محاسبه‌ی میزان تعلّق هر نقطه بر روی گسل به هر یک از زیر حوزه‌های فازی است. دقت کنید که در وضعیت کنونی زیر حوزه‌هایی داریم که فضای دوبعدی را بسط

جدول ۳-۲: قوانین اگر-آنگاهِ فازی برای شبکه‌ی انفیس با یک متغیر ورودی، (ξ)، و خروجی ثابت (A_i).

استدلال منطقی (۰ یا ۱)	استدلال فازی (عددی بین ۰ و ۱)
$\xi \in A$	$gmf_A(\xi)$
$\eta \in B$	$gmf_B(\xi)$
$(\xi \in A)\&(\eta \in B)$	$gmf_A(\xi) \times gmf_B(\eta)$

می‌دهند. به عبارت دیگر، در لایه‌ی اول حوزه‌های پیوسته‌ی ξ و η به N_ξ و N_η تابع عضویت فازی تقسیم شده‌اند.

در لایه‌ی دوم، مقادیر خروجی توابع عضویت یک بعدی با هم ترکیب می‌شوند تا مقادیر قوّت استدلال $W_{i\xi,i\eta}$ (مطابق با اصطلاحات مرسوم در منطق فازی) را به دست بیاید. در شبکه‌ی انفیس ترکیب دو جمله‌ی منطقی با عملگر و $(\&)$ با استفاده از ضرب حسابی مقادیر تابع عضویت [کلیر و باوزونگ، ۱۹۹۵] هر یک از جملات صورت می‌گیرد (جدول ۳-۲)

به عبارت دیگر، قوّت استدلال از مقادیر ذیل محاسبه می‌شود.

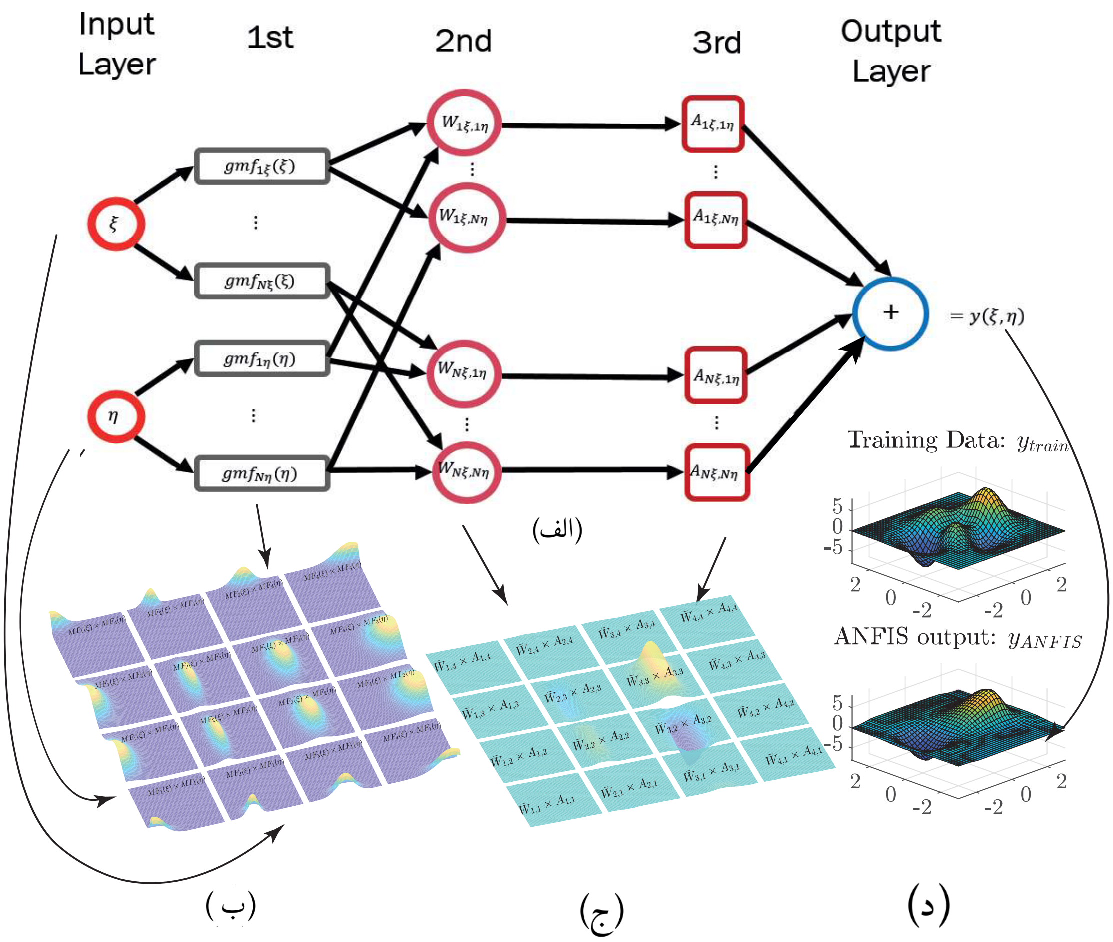
$$W_{i\xi,i\eta} = gmf_{i\xi} \times gmf_{i\eta} \tag{۳-۱۱}$$

خروجی لایه‌ی دوم، مقادیر قوّت استدلال نرمال شده، یا قوّت تحریک قوانین فازی، $\bar{W}_{i\xi,i\eta}$ هستند. این مقادیر، توابع پایه‌ی دو بعدی برای بسط لغزش در دو بُعد را در اختیار ما قرار می‌دهند (رابطه‌ی ۳-۱۲).

$$\bar{W}_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta) = \frac{W_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta)}{\sum_{i\xi=1}^{N_\xi} \sum_{i\eta=1}^{N_\eta} W_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta)} \tag{۳-۱۲}$$

همانند شبکه‌ی انفیس با یک ورودی، در لایه‌ی سوم شبکه‌ی حاضر، مقادیر ثوابت A_i در توابع $\bar{W}_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta)$ ضرب می‌شوند. در نهایت لایه‌ی خروجی، حاصل بسط با توابع پایه‌ی دوبُعدی را با هم جمع می‌کند تا خروجی شبکه‌ی عصبی به دست آید.

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i\xi=1}^{N_\xi} \sum_{i\eta=1}^{N_\eta} \bar{W}_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta) A_{i\xi,i\eta} \tag{۳-۱۳}$$



شکل ۳-۴: نمونه‌ای از شبکه‌ی عصبیِ انفیس برای تقریب زدن تابعی از دومتغیر ورودی مستقل. (الف) معماریِ انفیس برای دو ورودی/یک خروجی. (ب) گسسته‌سازیِ حوزه‌ی ورودی (ξ) با استفاده از توابع عضویت فازی، در این مثال از ۴ تابع عضویت فازی برای دو متغیر ξ و η استفاده شده است. (ج) خروجی هر یک از قوانین فازی توسط توابع عضویت خروجی که در سیستم انفیس برابر $\bar{W}_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta) \times A_i$ می‌باشد. (د) خروجی شبکه، $y(\xi,\eta)$ (شکل پائین) که تقریب شبکه از داده‌های آموزشی (شکل بالا) است.

و یا به طور معادل:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{W}}\mathbf{A} \qquad (۳-۱۴)$$

۳-۴ چرا سیستم ANFIS یک تقریب زننده‌ی عمومی برای توابع پیوسته است؟

چنانچه در تعداد قوانین فازی (بخش ۳-۲-۲) محدودیتی نباشد، سیستم مرتبه صفر سوجینو قادر است هر تابع غیر خطی، بر روی مجموعه‌ای فشرده[۴۰] را با دقت دلخواه تقریب بزند. اثبات قضیه‌ی فوق در منابع متعددی [همچون باکلی، ۱۹۹۲؛ کاسکو، ۱۹۹۴؛ وَنگ، ۱۹۹۲؛ وَنگ و مِندل، ۱۹۹۲] وجود دارد، برای آنکه کلیات موضوع برای خواننده جا بیفتد، در اینجا بر مبنای اثبات ارائه شده توسط جَنگ و همکاران [۱۹۹۷]، قضیه‌ی استون-وایرشتراس[۴۱] را بیان می‌کنیم:

قضیه ۳-۴-۱ (استون-وایرشتراس). حوزه‌ی $\mathfrak{D}$ که فضایی فشرده با N بُعد است را در نظر بگیرید، فرض کنید $\mathfrak{F}$ مجموعه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار بر $\mathfrak{D}$ باشد که شرایط زیر را ارضا می‌کنند:

- تابع ثابت واحد $f = ۱$ داخل $\mathfrak{F}$ باشد.
- جدایی پذیری: به ازای هر دو نقطه‌ی $x_۱ \neq x_۲$ در $\mathfrak{D}$، تابعی چون f در $\mathfrak{F}$ داشته باشیم، به نحوی که $f(x_۱) \neq f(x_۲)$.
- بسته بودن نسبت به عمل جمع و ضرب: اگر دو تابع f و g در $\mathfrak{F}$ باشند، آنگاه fg و $af + bg$ هم به ازای هر دو عدد حقیقی a و b داخل $\mathfrak{F}$ باشند.

در این صورت $\mathfrak{F}$ مجموعه‌ای چگال[۴۲] بر روی $C(\mathfrak{D})$ است. به بیان دیگر به ازای هر $\epsilon > ۰$ و هر تابع g در $C(\mathfrak{D})$، تابع f در $\mathfrak{F}$ وجود دارد به نحوی که $|g(x) - f(x) < \epsilon|$ برای تمامی $x \in \mathfrak{D}$ برقرار باشد.

[40] Compact Set
[41] Stone-Weierstrass Theorem
[42] Dense Set

بر مبنای قضیه‌ی فوق، جَنگ و همکاران [۱۹۹۷] نشان داند که سیستم ANFIS می‌تواند هر تابع پیوسته‌ای را تقریب بزند.

۳-۵ روش‌های آموزش شبکه‌ی انفیس

آموزش شبکه‌ی عصبی به معنای یافتن پارامترهای بهینه‌ی آن است، به نحوی که انطباق بین خروجیِ تولید شده توسط شبکه‌ی عصبی و داده‌های آموزشی حداکثر شود، و یا اینکه خطای بین آنها حداقل گردد. در این قسمت به تشریح نحوه‌ی یافتن بهترین پارامترهای شبکه‌ی عصبی می‌پردازیم. پیشتر، در بخش (۳-۲) با مفهوم تابع هزینه (رابطه‌ی ۳-۲) آشنا شدیم، در این بخش می‌خواهیم با کاربرد نُرم دوم خطا، انطباق میان داده‌های آموزش (y_{train}) و خروجی شبکه‌ی عصبی انفیس (y_{ANFIS}) را بیشینه کنیم. یافتن پارامترهای شبکه‌ی عصبی به نحوی که مقدار $Cost$ حداقل شود، به دو صورت، با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی مبتنی بر مشتق‌گیری [مانند جَنگ، ۱۹۹۳] و روش‌های بهینه‌یابی عمومی (مستقل از مشتق‌گیری) [مانند رضا کاظمی و همکاران، ۲۰۱۷] امکان‌پذیر است. انتخاب روش بهینه‌یابی به نوع تابع هزینه، پیوسته و مشتق‌پذیر بودن آن نسبت به پارامترهای شبکه‌ی عصبی دارد. در شبکه‌ی انفیس، چنانچه از توابع عضویت مشتق‌پذیر استفاده شود، تابع هزینه پیوسته و مشتق‌پذیر خواهد بود و نُرم دوم اختلاف میان خروجی شبکه‌ی عصبی و داده‌های آموزشی (رابطه‌ی ۳-۱۵) برابر است با:

$$Cost = \sum_{i=۱}^{N} (y_{train} - y_{ANFIS})^{۲} \qquad (۱۵-۳)$$

۳-۵-۱ بهینه‌یابی با استفاده از روش شیبِ نزولی: پَس‌انتشار

روش پس‌انتشار[۴۳] از رایج‌ترین روش‌های مورد استفاده در آموزش شبکه‌های عصبی است. در این روش، پارامترهای شبکه‌ی عصبی در یک روند تکراری، با استفاده از بُردار گرادیان خطا نسبت به پارامترهای شبکه‌ی عصبی محاسبه می‌شوند. در این روش، در هر مرحله از حلقه‌ی آموزش شبکه، پارامترهای شبکه‌ی عصبی به منظور حداقل شدن تابع هزینه به روز رسانی می‌شوند. فرض کنید مجموعه‌ی $\mathbf{p} = \{p_۱, p_۲, \cdots, p_L\}$ پارامترهای شبکه‌ی عصبی

[43] Back-propagation

را نشان بدهد، جهت کمترین شیب توسط بردار گرادیان تابع خطا به صورت رابطه‌ی (۳-۱۶) می‌باشد.

$$\nabla Cost = \begin{bmatrix} \frac{\partial Cost}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Cost}{\partial p_L} \end{bmatrix} \tag{۳-۱۶}$$

اگر مقادیر پارامترهای شبکه‌ی عصبی به میزان کوچک ($\Delta \mathbf{p}$) تغییر کنند، مقدار تابع هزینه به میزان $\Delta Cost = \nabla Cost \cdot \Delta \mathbf{p}$ تغییر خواهد کرد. برای بهینه‌یابی باید در جهتی حرکت کنیم که بیشترین میزان کاهش در تابع هزینه به وجود بیاید، از این روی پارامترهای جدید ($\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$) از این روی در ضرب داخلی دو بردار $\nabla Cost$ و $\Delta \mathbf{p}$، بیشترین کاهش زمانی حاصل می‌شود که امتداد $\Delta \mathbf{p}$ در جهت $-\nabla Cost$ باشد، بنابراین:

$$\mathbf{\Delta p} = -\kappa \frac{\nabla Cost}{||\nabla Cost||} \tag{۳-۱۷}$$

پارامتر κ عدد کوچکی که بدان نرخ یادگیری[۴۴] گفته می‌شود، این عدد میزان تغییرات پارامترهای شبکه‌ی عصبی را در روش بیشترین شیب تعیین می‌کند. به هر حلقه‌ی روش بیشترین شیب، یک مرحله‌ی آموزش[۴۵] گفته می‌شود. پس از چندین مرحله‌ی آموزش، پارامترهای شبکه‌ی عصبی به نقطه‌ی سکون می‌رسند[۴۶] و تغییرات زیادی نمی‌کنند.

با استفاده از روش پَس‌انتشار، پارامترهای موجود در لایه‌های متفاوت شبکه‌ی عصبی را می‌توان همزمان به روز رسانی کرد [جَنگ و همکاران، ۱۹۹۱]. در روش پَس‌انتشار، از قاعده‌ی مشتق‌گیری زنجیره‌ای برای محاسبه‌ی مشتقات تابع خطا نسبت به پارامترهای موجود در لایه‌های مختلف استفاده می‌شود.

فرض کنید O_i^k خروجی گره iاُم در لایه‌ی kاُم باشد و خروجی تمامی گره‌ها در این لایه توسط بردار $(O_1^k, \cdots, O_{(\#k)}^k)$ نشان داده شود. خروجی لایه‌ی بعدی، لایه‌ی $k+1$، وابسته به ورودی‌های آن لایه دارد، یعنی خروجی‌های لایه‌ی قبل، O_i^k و پارامترهای موجود در گره‌های همین لایه، $\mathbf{p}_i^{k+1}$:

[۴۴] Learning rate
[۴۵] Learning epoch
[۴۶] Stationary point

$$O_i^{k+1} = O_i^{k+1}(O_1^k, \cdots, O_{(\#k)}^k, \mathbf{P}_i^{k+1}) \tag{۳-۱۸}$$

که در آن $\#k$ تعداد گره‌ها در لایه‌ی kاُم است و $\mathbf{P}_i^{k+1}$ مجموعه‌ی پارامترها در iاُمین گره در $(k+1)$اُمین لایه است. مشتق تابع هزینه، یا تابع خطا نسبت به خروجی گره iاُم در لایه‌ی kاُم، O_i^k را می‌توان با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای به فرم زیر نوشت:

$$\frac{\partial Cost}{\partial O_i^k} = \sum_{m=1}^{\#(k+1)} \frac{\partial Cost}{\partial O_m^{k+1}} \frac{\partial O_m^{k+1}}{\partial O_i^k} \tag{۳-۱۹}$$

به طور کلّی، مشتق تابع خطا نسبت به پارامتر nاُم در گره iاُم از لایه‌ی kاُم، $(p_{(n,i)}^k)$ را می‌توان از طریق رابطه‌ی (۳-۲۰) محاسبه کرد.

$$\frac{\partial Cost}{\partial p_{(n,i)}^k} = \frac{\partial Cost}{\partial O_i^k} \frac{\partial O_i^k}{\partial p_{(n,i)}^k} \tag{۳-۲۰}$$

با استفاده از روابط بالا، مشتق تابع هزینه نسبت به پارامترهای موجود در هر گره، به صورت زنجیره‌ای و از آخرین لایه به اولین لایه محاسبه می‌گردد. با استفاده از مشتقات فوق، می‌توان بردار گرادیان را تشکیل داده و مقادیر بهینه‌ی پارامترها را با استفاده از روش شیبِ نزولی به دست آورد.

۳-۵-۲ روش آموزش دوگانه

آموزش به روش شیبِ نزولی دو اشکال مهم دارد: ۱) کُند است، ۲) در مینیمم‌های محلی گیر می‌اُفتد. برای جلوگیری از مورد اول، جَنگ [۱۹۹۳] روش آموزش دوگانه را ارائه داد که می‌تواند روند آموزش را سرعت ببخشد. در روش آموزش دوگانه، پارامترهای شبکه را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد، پارامترهایی که دارای رابطه‌ای خطی با خروجی شبکه‌ی عصبی هستند: همانند متغیرهای A_i در شبکه‌ی انفیس دوبُعدی بخش (۳-۳-۱) و آن‌هایی که رابطه‌ای

غیرخطی با خروجی شبکه دارند: همانند پارامترهای توابع پایه‌ی $\bar{W}_i$، σ_i و μ_i. در گام اول می‌توان پارامترهای خطی را از طریق روش حدأقل مربعات (رابطه‌ی ۳-۲۱) که حدأقل نُرم خطای L2 بین خروجی شبکه‌ی عصبی و داده‌های آموزشی را نتیجه می‌دهد، به دست آورد و در گام دوم پارامترهای غیرخطی را از طریق روابط (۳-۲۲) در حالی که پارامترهای خطی ثابت نگه داشته شده است، به دست آورد. دو گام روش آموزش دوگانه به صورت متوالی و پشت سر هم تکرار می‌شود تا مقدار تابع خطا (رابطه‌ی ۳-۱۵) حدأقل شود.

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{W}}^T\bar{\mathbf{W}})^{-1}\bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{y}_{train} \qquad (۳-۲۱)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i - \frac{\kappa}{||\nabla Cost||}\frac{\partial Cost}{\partial \sigma_i} \\ \mu_i &= \mu_i - \frac{\kappa}{||\nabla Cost||}\frac{\partial Cost}{\partial \mu_i} \end{aligned} \qquad (۳-۲۲)$$

به هر بار تکرار دو گام متوالی روش آموزش دوگانه، یک **دوره‌ی آموزش**[47] گفته می‌شود. در روش جَنگ [۱۹۹۳] جهت سرعت بخشیدن به روند آموزش، پارامتر نرخ آموزش (κ) با توجه به سابقه‌ی صعودی یا نزولی بودن تابع خطا ($Cost$)، طی دوره‌های متوالی آموزش اصلاح می‌گردد. اگر مقدار تابع خطا پس از ۴ دوره‌ی متوالی آموزش کاهش پیدا کند، مقدار نرخ آموزش (κ) افزایش داده، اگر مقدار تابع خطا کاهش و سپس افزایش بیابد، مقدار نرخ آموزش را کاهش می‌دهیم. اگر مقادیر مشتق را درست محاسبه کرده باشیم، دو افزایش متوالی خطا امکان پذیر نیست. پس از چند دوره آموزش شبکه، پارامترهای آن عموماً همگرا می‌شوند. سرعت همگرایی پارامترهای شبکه به مقدار نرخ آموزش بستگی دارد، هر چند که مقادیر نهایی آنها به κ و نسبت‌های افزایش و کاهش آن وابسته نیست [جَنگ، ۱۹۹۳].

روش آموزش ارائه شده در این بخش برای داده‌های آموزشی دارای مقادیر حقیقی و مختلط قابل کاربرد است، برای این منظور یادآوری می‌شود که مقدار نُرم دوم یک بردار مختلط برابر با (رابطه‌ی ۳-۲۳) است:

[47] Epoch of learning

$$||\mathbf{y}_{\mathbf{train}} - \mathbf{y}_{\mathbf{ANFIS}}||_۲^۲ = (\mathbf{y}_{\mathbf{train}} - \mathbf{y}_{\mathbf{ANFIS}})^T(\mathbf{y}_{\mathbf{train}} - \mathbf{y}_{\mathbf{ANFIS}}) \qquad (۳-۲۳)$$

که در آن علامت T عملگر ترانهاده است. یادآوری می‌شود که در یک ماتریس دارای مقادیر مختلط، $C_{ij}^T = \bar{C}_{ji}$ است که در آن $^-$نشان‌دهنده مقدار مزدوج اعداد مختلط است، نتیجه این است که مقدار نُرم دوم خطا همواره حقیقی خواهد شد. در گام حدأقل مربعات آموزش مرکب، بردار A_i ها، که از رابطه‌ی (۳-۲۱) به دست می‌آید، دارای مقادیر مختلط خواهد شد. در گام بیشترین شیب که مقدار $\frac{\partial Cost}{\partial MF}$ را می‌جوئیم، چون هم مقدار صورت و هم مخرج اعداد حقیقی هستند، در نتیجه مقدار تصحیح پارامترهای μ_i و σ_i حقیقی خواهد بود. نمونه‌هایی از تقریب تابعی فازی با استفاده از روش آموزش دوگانه، که در این بخش تشریح شد، در شکل‌های ۳-۲ (د) و ۳-۴ (د) ارائه شده است. روش تقریب تابعی فوق جهت حل معکوس در فصل ۴ مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

فصل ۴

روش حل معکوس پیشنهادی با استفاده از روش تقریب تابع فازی

۴-۱ مقدمه

تا اینجا با مقدمات سینماتیک چشمه‌ی لرزه‌زا (فصل ۱)، روش‌های رایج حل معکوس سینماتیکی (فصل ۲) و تقریب تابع فازی (فصل ۳) آشنا شدیم. در این فصل با ترکیب مفاهیم ارائه شده، روش حل معکوس سینماتیکی با استفاده از روش تقریب تابعی فازی را ارائه می‌دهیم و خصوصیات آن را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۲ رابطه‌ی مستقیم: بسط قضیه‌ی معرف زلزله‌شناسی با استفاده از توابع پایه‌ی فازی

چنانکه پیشتر گفته شد، لغزش بر روی صفحه‌ی دو بُعدی گسل را می‌توان با استفاده از قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی به تغییر مکان سطح زمین تبدیل کرد. بردار لغرش در هر فرکانس را می‌توان به دو مؤلفه‌ی عمود بر هم، یکی در راستای امتداد، $u_s(\xi, \eta, \omega)$ و دیگری در راستای بالا-شیب، $u_d(\xi, \eta, \omega)$ تجزیه کرد. بنابراین توصیف لغزش به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\mathbf{u}(\xi,\eta,\omega)=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_s & \mathbf{v}_d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_s(\xi,\eta,\omega)\\ u_d(\xi,\eta,\omega)\end{bmatrix} \quad (۱-۴)$$

که در آن $\mathbf{v}_s$ و $\mathbf{v}_d$ به ترتیب بردارهای یکّه در راستای امتداد و راستای بالا-شیب گسل هستند. در این قسمت ، برای آنکه روش حل معکوس پیشنهادی را شرح دهیم و فرمول‌بندی ساده‌تری داشته باشیم، فقط مولفه‌ی راستای امتداد را در نظر می‌گیریم: $\mathbf{u}(\xi,\eta,\omega)=\mathbf{v}_s u_s(\xi,\eta,\omega)$. در بخش ۴-۵ به منظور کاربرد در مسائل واقعی، این فرمول‌بندی را برای لغزش در هر دو مؤلفه‌ی امتداد و شیب توسعه خواهیم داد.

همچنان که در بخش (۳-۳-۱) گفته شد، با استفاده از رابطه‌ی (۳-۱۳)، در هر فرکانس ω_j، می‌توانیم لغزش دو بعدی را با استفاده از تقریب تابع فازی به شکل زیر بنویسیم

$$u_s(\xi,\eta,\omega_j)=\sum_{i_\xi=1}^{N_\xi}\sum_{i_\eta=1}^{N_\eta}\bar{W}_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}(\xi,\eta)A_{i_\xi,i_\eta,\omega_j} \quad (۲-۴)$$

که در آن $\bar{W}_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}(\xi,\eta)$ توابع پایه‌ی تطبیقی هستند که در توسعه این رساله بر مبنای توابع عضویت گاوسی ساخته شده‌اند و $A_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}$ ضرایب تقریب تابعی هستند که باید از روی داده‌ها تعیین شوند. دلیل استفاده از توابع عضویت گاوسی این است که این توابع هَموار هستند (تا بی‌نهایت مرتبه مشتق‌پذیرند) و شکل آنها به طور کامل با دو پارامتر توصیف می‌شود، پارامتر انحراف معیار σ و پارامتر مقدار میانی، μ. دقت کنید که استفاده‌ی ما از تابع عضویت گاوسی، به معنی عدم امکان استفاده از سایر توابع عضویت نیست و کماکان از هر نوع تابع عضویت معتبری در نظریه‌ی تقریب تابعی فازی می‌توان استفاده نمود. بر اساس قضیه‌ی معرّف (رابطه‌ی ۱-۵)، برای داده‌های شبیه‌سازی شده بر روی زمین داریم:

$$u_n(\mathbf{x},\omega_j)=\sum_{i_\xi=1}^{N_\xi}\sum_{i_\eta=1}^{N_\eta}\int_\Gamma \bar{W}_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}(\xi,\eta)G'_n(\mathbf{x};\xi,\eta,\omega_j)A_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}\mathrm{d}\Gamma \quad (۳-۴)$$

که در آن، Γ صفحه‌ی گسل است و

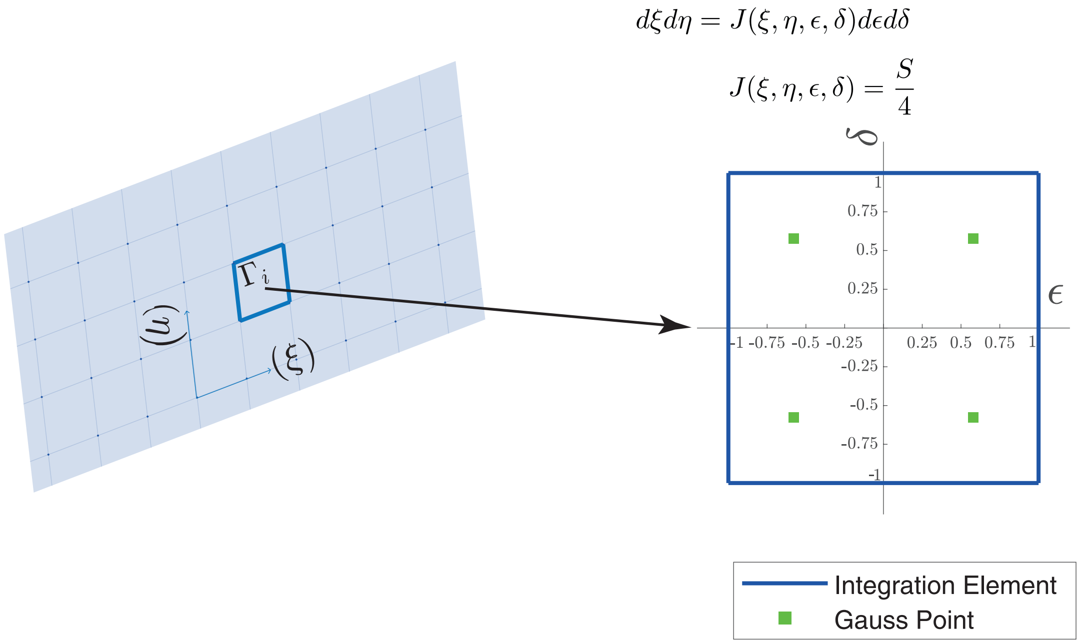
$$G'_n = v_{si} c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial \xi_q} G_{np} \tag{۴-۴}$$

رابطه‌ی (۴-۳)، تغییر شکل سطح زمین را به صورت تابعی از لغزش بر روی گسل، که خودش ترکیب چندین تابع پایه‌ی تطبیقی، $\bar{W}_{i_\xi, i_\eta, \omega_j}(\xi, \eta)$ و دامنه‌ی آنها، $A_{i_\xi, i_\eta, \omega_j}$ است به دست می‌دهد. در رابطه‌ی (۴-۴)، v_{si} مؤلفه‌ی iاُم از بردار یکّه‌ی راستای امتداد گسل است.

برای برآورد انتگرال (رابطه‌ی ۴-۳) بر روی سطح گسل از روش کارآمد گاوس کوادریچر استفاده می‌کنیم. برای این منظور سطح گسل Γ را به زیرگسل‌های مربعی شکل Γ_i تقسیم می‌کنیم (شکل ۴-۱(الف))، سپس انتگرال‌گیری را از مختصات فیزیکی، در راستای امتداد و در راستای بالا-شیب (ξ, η) به مختصات طبیعی (ϵ, δ) ببریم (شکل ۴-۱(ب))، که در آن انتگرال‌گیری به روش گاوسی ساده‌تر است. انتگرال رابطه‌ی مستقیم (۴-۳) بر روی هر یک از المان‌ها، Γ_i، به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_{\Gamma_i} \bar{W}_{i\xi, i\eta, \omega_j}(\xi, \eta) G'_n(\mathbf{x}; \xi, \eta, \omega_j) A_{i\xi, i\eta, \omega_j} d\Gamma = \tag{۴-۵}$$
$$\int_{\epsilon=-۱}^{+۱} \int_{\delta=-۱}^{+۱} \bar{W}_{i\xi, i\eta, \omega_j}(\xi(\epsilon, \delta), \eta(\epsilon, \delta)) G'_n(\mathbf{x}; \xi(\epsilon, \delta), \eta(\epsilon, \delta), \omega_j) A_{i\xi, i\eta, \omega_j} J(\xi, \eta; \epsilon, \delta) d\epsilon d\delta \approx$$
$$\sum_{ig=۱}^{M} \sum_{jg=۱}^{N} \bar{W}_{i\xi, i\eta, \omega_j}(\xi(\epsilon_{ig}, \delta_{ig}), \eta(\epsilon_{jg}, \delta_{jg})) G'_n(\mathbf{x}_{is}; \xi(\epsilon_{ig}, \delta_{ig}), \eta(\epsilon_{jg}, \delta_{jg}), \omega_j) \times$$
$$w_{ig} w_{jg} J(\xi, \eta; \epsilon_{ig}, \delta_{ig}) A_{i\xi, i\eta, \omega_j}$$

با توجه به هندسه‌ی ثابت المان‌های انتگرال‌گیری در مختصات طبیعی، مساحت هر یک از آنها برابر ۴ واحد است. در نتیجه اگر مساحت المان انتگرال‌گیری در مختصات فیزیکی برابر با S واحد باشد، هسته‌ی تبدیل دستگاه‌های مختصات $J(\xi, \eta; \epsilon_{ig}, \delta_{ig})$ برابر با $\frac{S}{۴}$ می‌شود. دقت کنید که برای برآورد رابطه‌ی (۴-۳)، توابع گرین باید برای نقاط انتگرال‌گیری گاوسی محاسبه شوند. می‌توانیم فرض کنیم که تعداد نقاط گاوسی در هر دو راستای امتداد و بالا-شیب بایکدیگر مساوی است، به نحوی که $M = N - N_g$ باشد. در این صورت رابطه‌ی (۴-۳) به شکل زیر در خواهد آمد:



(الف) (ب)

شکل ۴-۱: کاربرد روش انتگرال‌گیری گاوس برای محاسبه‌ی رابطه‌ی مستقیم رابطه‌ی (۴-۳). (الف) المان انتگرال‌گیری بر روی صفحه‌ی گسل (در مختصات فیزیکی) (ب) المان انتگرال‌گیری دو بُعدی (مربع آبی رنگ در مختصات طبیعی، با ۲ نقطه‌ی گاوسی در هر امتداد که با رنگ سبز مشخص شده‌اند.

$$u_n(\mathbf{x}_{is},\omega_j)=\sum_{i\xi=1}^{N_\xi}\sum_{i\eta=1}^{N_\eta}\sum_{\Gamma_i}\sum_{ig=1}^{N_g}\sum_{jg=1}^{N_g}\bar{W}_{i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi(\epsilon_{ig,\Gamma_i},\delta_{ig,\Gamma_i}),\eta(\epsilon_{jg,\Gamma_i},\delta_{jg,\Gamma_i}))$$
$$G_n'(\mathbf{x}_{is};\xi(\epsilon_{ig,\Gamma_i},\delta_{ig,\Gamma_i}),\eta(\epsilon_{jg,\Gamma_i},\delta_{jg,\Gamma_i}),\omega_j)w_{ig}w_{jg}\frac{S}{4}A_{i\xi,i\eta,\omega_j} \qquad (۴-۶)$$

که در آن ϵ_{ig,Γ_i}، ig–اُمین نقطه‌ی گاوسی در راستای امتداد و δ_{jg,Γ_i}، jg–اُمین نقطه‌ی گاوسی در راستای بالا–شیب، داخل المان Γ_i است.

رابطه‌ی (۴-۶) مجموعه‌ای از روابط خطی است که در آن $u_n(\mathbf{x}_{is},\omega_j)$ بردار داده‌های شبیه‌سازی شده در فرکانس ω_j و نقاط (ایستگاه‌های) $\mathbf{x}_{is}$ می‌باشد. تعداد عناصر داخل بردار $\mathbf{x}_{is}$ برابر با $3\times N_s$ است که در آن N_s تعداد ایستگاه‌هاست. در سمت راست معادله، $A_{i\xi,i\eta,\omega_j}$ دامنه‌ی توابع پایه‌ی تطبیقی، $\bar{W}_{i\xi,i\eta,\omega_j}$ را نشان می‌دهند. می‌توان معادلات رابطه‌ی (۴-۶) را با تغییر قاعده‌ی شماره‌گذاری در یک ماتریس چید. برای این منظور ابتدا دامنه‌ی توابع پایه‌ی بسط، $A_{i\xi,i\eta,\omega_j}$ را در بردار A_{ibasis} و داده‌های تولید شده $u_n(\mathbf{x}_{is},\omega_j)$ را در بردار d_{irec} قرار می‌دهیم. برای این منظور از تغییر اندیس زیر استفاده می‌کنیم.

$$ibasis=(i\xi-1)\times N_\eta+i\eta$$
$$irec=(is-1)\times 3+n$$

که در آن هر زوج $(i\xi,i\eta)$ به یک مقدار منحصر بفرد $ibasis$، و هر زوج (is,n) به یک مقدار منحصر بفرد $irec$ تبدیل می‌شوند. رابطه‌ی مستقیمی که بردار دامنه‌ها A_{ibasis} را به داده‌ها d_{irec} در هر فرکانس ω_j تبدیل می‌کند، حاصل انتگرال‌گیری عددی توابع پایه‌ی فازی بر روی توابع گرین است. حاصل این رابطه را با $(GW_{\omega_j})_{irec,ibasis}$ نشان می‌دهیم و عناصر آن را از رابطه‌ی (۴-۷) به دست می‌آوریم:

$$(GW_{\omega_j})_{irec,ibasis} = \sum_{\Gamma_i}\sum_{ig=۱}^{N_g}\sum_{jg=۱}^{N_g}\bar{W}_{i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi(\epsilon_{ig,\Gamma_i},\delta_{jg,\Gamma_i}),\eta(\epsilon_{ig,\Gamma_i},\delta_{jg,\Gamma_i}))$$
$$G'_n(\mathbf{x}_{is};\xi(\epsilon_{ig,\Gamma_i},\delta_{jg,\Gamma_i}),\eta(\epsilon_{ig,\Gamma_i},\delta_{jg,\Gamma_i}),\omega_j)w_{ig}w_{jg}\frac{S}{۴} \quad (۴-۷)$$

مسئله‌ی معکوس دوبُعدی ما برای به دست آوردن لغزش در هر فرکانس ω_j برابر می‌شود با:

$$\mathbf{d}_{\omega_j} = \mathbf{GW}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j} \quad (۴-۸)$$

رابطه‌ی (۴-۸)، میان داده‌ها و پارامترهای انفیس معادله‌ای خطی برقرار می‌کند. داده‌ها، $\mathbf{d}$ معلوم هستند و ما بایستی بر اساس آنها، هم توابع پایه‌ی $\bar{W}_{i\xi,i\eta,\omega_j}$ که از طریق آنها رابطه‌ی مستقیم $\mathbf{GW}_{\omega_j}$ شکل گرفته است و هم دامنه‌ی آنها $\mathbf{A}_{\omega_j}$ را تعیین کنیم.

رابطه‌ی (۴-۸) به ما امکان می‌دهد که پارامترهای مجهول $\bar{W}_{ibasis,\omega_j}$ و مقادیر $\mathbf{A}_{\omega_j}$ را از طریق برازش به داده‌ها به دست بیاوریم، این مسئله‌ی برازش و بهینه‌یابی از طریق روش آموزش دوگانه (بخش ۳-۵-۲) و توسعه‌ی آن برای حل معکوس که در بخش بعد ارائه می‌شود، حل خواهد شد و با آموزش انفیس، مقادیر بهینه‌ی پارامترهای تقریب زننده‌ی لغزش به دست می‌آیند و از ترکیب آنها توزیع لغزش سینماتیکی نتیجه می‌شود.

۴-۳ حل معکوس و منظم‌سازی

روش آموزش دوگانه که توسط جَنگ [۱۹۹۳] ارائه شده و ما مبانی آن را در بخش (۳-۵-۲) شرح دادیم، می‌تواند برای یافتن پارامترهای روش تقریب تابعی انفیس به کار برده شود. این روش با تکرار میان حل معکوس خطی به روش حداقل مربعات برای یافتن $\mathbf{A}_{\omega_j}$ و روش شیب نزولی و پس‌انتشار برای یافتن پارامترهای غیرخطی $\bar{W}_{ibasis,\omega_j}$ کار می‌کند. در گام خطی روش دوگانه، $\mathbf{A}_{\omega_j}$ را از رابطه‌ی (۴-۸) و با کمینه‌سازی نُرم دوم خطا بین داده‌های آموزشی ($\mathbf{d}_{\omega_j}$) و پیش‌بینی داده‌ها توسط رابطه‌ی مستقیم ($\mathbf{GW}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}$) به دست می‌آوریم:

$$\left\|\mathbf{GW}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}-\mathbf{d}_{\omega_j}\right\|_۲ \tag{۴-۹}$$

بردار بهینه‌ی $\mathbf{A}_{\omega_j}$ با استفاده از روش حدأقل مربعات، به سادگی از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathbf{A}_{\omega_j}=(\mathbf{GW}_{\omega_j}^T\mathbf{GW}_{\omega_j})^{-۱}\mathbf{GW}_{\omega_j}^T\mathbf{d}_{\omega_j} \tag{۴-۱۰}$$

چون مسئله بَدوضع است، حل رابطه‌ی (۴-۱۰) ممکن است ناپایدار باشد، یعنی نوفه با مقدار کم می‌تواند مقادیر $\mathbf{A}_{\omega_j}$ را به میزان زیادی تغییر دهد. برای پایدار کردن حل معکوس، یک قید منظم‌ساز، جهت یافتن هَموارترین لغزش تعریف می‌کنیم. این قید، کمک می‌کند که مدل لغزشی با کمترین پیچیدگی بیابیم که می‌تواند داده‌های مشاهده شده را به خوبی بازتولید کند.

فضای مدل در مسئله‌ی ما لغزش بر روی گسل است (رابطه‌ی ۴-۲) که با استفاده از آن می‌توان لغزش را بر روی مجموعه‌ی دلخواهی از نقاط به دست آورد. در حالت کلی، می‌توان لغزش را بر روی نقاطی جداگانه، به غیر از نقاط انتگرال‌گیری گاوسی برآورد کرد. به این نکته در بخش ۵-۷ خواهیم پرداخت. رابطه‌ی ۴-۲ را بر روی N_{reg} نقطه‌ی منظم‌سازی به مختصات (ξ_{reg},η_{reg}) برآورد می‌کنیم، با اعمال $ibase=(i\xi-۱)\times N_\xi+i\eta$ داریم:

$$u_{\omega_j}(\xi_{ireg},\eta_{ireg})=\sum_{i\xi=۱,i\eta=۱}^{N_\xi\times N_\eta}\bar{W}_{i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi_{ireg},\eta_{ireg})A_{ibase,\omega_j} \tag{۴-۱۱}$$

که آن را نیز می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{u}_{\omega_j}=\mathbf{W}_{reg,\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j} \tag{۴-۱۲}$$

در بخش (۵-۲) اشاره کردیم که یک جواب منظم، دارای تطابق کامل با داده‌ها نیست و در جواب آن، یک اختلاف

قابل قبول بین داده‌ها و شبیه‌سازی‌ها وجود دارد.

$$\left\| \mathbf{GW}_{\omega_j} \bar{\mathbf{A}}_{\omega_j} - \mathbf{d}_{\omega_j} \right\|_۲ < \delta. \tag{۴-۱۳}$$

می‌خواهیم یک جواب منظم بیابیم که دارای کمترین پیچیدگی لغزش باشد و داده‌های مشاهده شده تطابق خوبی با شبیه‌سازی‌ها داشته باشند، بنابراین دو شرط بهینه‌یابی لازم داریم: ۱) تطابق مناسب بین داده‌های مشاهداتی و شبیه‌سازی، و ۲) کمینه بودن لاپلاسین لغزش:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{GW}_{\omega_j} \mathbf{A}_{\omega_j} - \mathbf{d}_{\omega_j} \right\|_۲ < \delta \\ \min \quad & \left\| \mathbf{LW}_{reg,\omega_j} \mathbf{A}_{\omega_j} \right\|_۲ \end{aligned} \tag{۴-۱۴}$$

که در آن، $\mathbf{L}$، تقریب تفاضل‌های محدود عملگر لاپلاسین ($\nabla^۲$) است و برای یک صفحه‌ی دوبعدی محاسبه می‌شود و به‌عنوان ماتریس هَموارکننده عمل می‌کند. در بخش (۲-۹-۱) دیدیم که با استفاده از روش منظم‌سازی تیخونوف می‌توان با معرفی پارامتر (α)، جواب رابطه‌ی ۴-۱۴ را به دست آورد (رابطه‌ی ۴-۱۵).

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{GW}_{\omega_j} \\ \alpha \mathbf{LW}_{reg,\omega_j} \end{bmatrix} \mathbf{A}_{\omega_j} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\omega_j} \\ ۰ \end{bmatrix} \right\|_۲^۲ \tag{۴-۱۵}$$

توجه کنید که دامنه‌ی توابع تقریب فازی، $\mathbf{A}_{\omega_j}$، متغیرهای مختلط هستند، به همین علت سیستم تقریب تابع فازی قادر است که هردو اطلاعات دامنه و فاز را در خروجی تولید کند (رابطه‌ی ۴-۲). جواب معادله‌ی (۴-۱۵) را می‌توان با استفاده از روش حدأقل مربعات و معادله‌ی نُرمال به صورت (رابطه‌ی ۴-۱۶) به دست آورد.

$$(\mathbf{GW}_{\omega_j}^T \mathbf{GW}_{\omega_j} + \alpha^۲ (\mathbf{LW}_{reg,\omega_j})^T \mathbf{LW}_{reg,\omega_j}) \mathbf{A}_{\omega_j} = \mathbf{GW}_{\omega_j}^T \mathbf{d}_{\omega_j} \tag{۴-۱۶}$$

پارامتر منظم‌ساز α را می‌توان به عنوان پارامتر کنترل کننده‌ی هَموار بودن جواب تفسیر کرد. این پارامتر را با

استفاده از منحنی L-curve (بخش ۲-۹-۱) به دست آورد و آن را به عنوان پارامتر متوازن کننده هَموار بودن لغزش و مناسب بودن تقریب داده‌ها تفسیر کرد. نقطه‌ی توازن بهینه، نقطه‌ای است که منحنی L-curve دارای بیشترین انحناست. این نقطه نشان‌دهنده‌ی هَموارترین مدلی است که بهترین تطابق با داده‌ها را دارد. لازم به ذکر است در مواردی که خطای داده‌ها را داشته باشیم، با استفاده از تمایز[1] می‌توانیم مستقیماً مقدار α را به دست بیاوریم [آستِر و همکاران، ۲۰۱۸]. همچنین توجه کنید که در حالت کلی، میزان هَموار بودن لغزش در فرکانس‌های مختلف، متفاوت است.

تابع هزینه‌ای که در روش حل دوگانه آن را کمینه می‌کنیم برابر است با:

$$Cost_{FIM} = \underbrace{\left\|\mathbf{G}\mathbf{W}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j} - \mathbf{d}_{\omega_j}\right\|_2^2}_{Cost_{data}} + \alpha^2 \underbrace{\left\|\mathbf{L}\mathbf{W}_{reg,\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}\right\|_2^2}_{Cost_{smooth}} \quad (۴\text{-}۱۷)$$

$Cost_{FIM}$ در رابطه‌ی (۴-۱۷) تابع هزینه‌ای را که در روش پیشنهادی با استفاده از توابع پایه‌ی فازی کمینه می‌شود، نشان می‌دهد. در روش آموزش دوگانه، ابتدا $\mathbf{A}_{\omega_j}$ با استفاده از رابطه‌ی (۴-۱۶) به دست می‌آید. سپس پارامترهای خطی ثابت نگه داشته شده و مشتق $Cost_{FIM}$ (رابطه‌ی ۴-۱۷) نسبت به پارامترهای غیرخطی $\bar{W}_{i\xi,i\eta,\omega_j}$ (روابط ۳-۲۰ و ۳-۲۲) محاسبه می‌شوند. پارامترهای غیرخطی توسط مشتق تابع هزینه با استفاده از روش شیب نزولی محاسبه می‌شوند. دو گام آموزشی روش آموزش دوگانه به صورت متوالی اعمال می‌گردند تا $Cost_{FIM}$ به نقطه‌ی سکون برسد.

۴-۴ تست سینتتیک

۴-۴-۱ مثال معیار SIV-inv1

پروژه‌ی صحت‌سنجی حل معکوس چشمه (SIV) که در بخش (۲-۱۱) معرفی گردید، به منظور آزمودن عملکرد روش‌های حل معکوس سینماتیکی چشمه، چندین تمرین تعریف کرده است [مای و همکاران، ۲۰۱۶]. این تمرین‌ها مجموعه‌ای از مدل‌های لغزش بر روی گسل و زمین‌لرزه‌های ناشی از آن را شامل می‌شود. از کاربران دعوت شده است که از این داده‌های سنتز شده‌ی زمین‌لرزه استفاده کنند و جواب نرم‌افزارهای خودشان را به دست آورده و در

[1] Discrepancy principle

وبسایت این پروژه بارگذاری کنند. کیفیت جواب به دست آمده از مقایسه‌ی آن با جواب اصلی سنجیده می‌شود. در این رساله، کیفیت روش خودمان را با حل معکوس داده‌های سنتز شده در مثال معیار SIV-inv1 محک زده‌ایم.

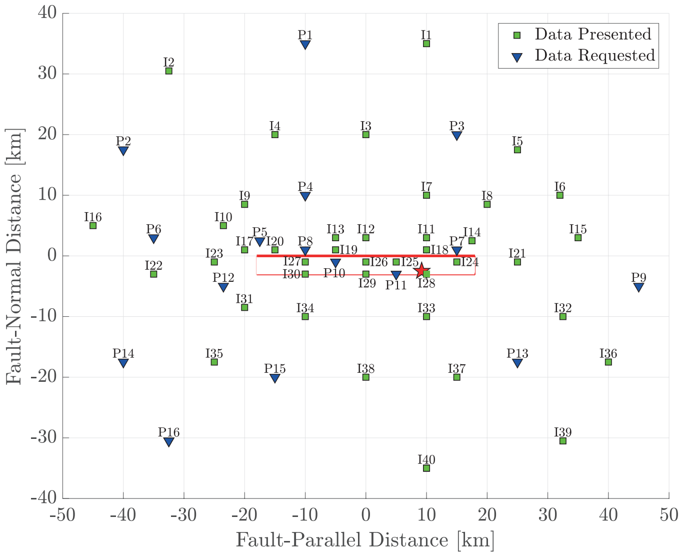
مثال SIV-inv1 از شبیه‌سازی شکست خودبخوی دینامیکی[۲] گسل که پدیده‌ی زمین‌لرزه را همانند گسترش یک تَرَک مدلسازی می‌کند، تشکیل شده است و بنابراین از نظر فیزیکی خود-شبیه[۳] است. این شکست بر روی یک گسل با زاویه‌ی شیب ۸۰ درجه شبیه‌سازی شده است که لغزش بر روی آن دارای سازوکار امتداد لغز است. صفحه‌ی لغزش دارای طول گسل ۳۶ کیلومتر و عرض آن ۱۸ کیلومتر است، ممان لرزه‌ای زلزله $M_\circ = ۱/۰۶ \times ۱۰^{۱۹}\mathrm{N.m}$ بوده و بزرگای گشتاوری آن $M_w = ۶/۶$ می‌باشد. داده‌های شبیه‌سازی شده‌ی بدون نوفه در ۴۰ ایستگاه در حوزه‌ی نزدیک گسل ارائه شده‌اند (شکل ۴-۲ (الف)). نرخ نمونه‌برداری از رکوردهای شبیه‌سازی شده برابر با $۲۵Hz$ می‌باشد و نتایج شبیه‌سازی دارای محتوای فرکانسی کمتر از $۲/۵Hz$ می‌باشند.

در این مثال، مبدأ مختصات در مرکز تصویر خط بالایی گسل بر روی سطح زمین در نظر گرفته شده است. کانون در مختصات 9.10 km E، -1.5802 km N و در عمق 13.9618 km واقع شده است. برای شبیه‌سازی امواج مورد استفاده در حل معکوس، مشخصات مکانیکی لایه‌ها ارائه شده است. این مدل سرعتی یک بعدی همگن و همسانگرد در شکل (۴-۲ (ب)) ترسیم گردیده است. در این مدلسازی، کاهندگی امواج برابر با صفر در نظر گرفته شده است ($Q_p = Q_s = \infty$).

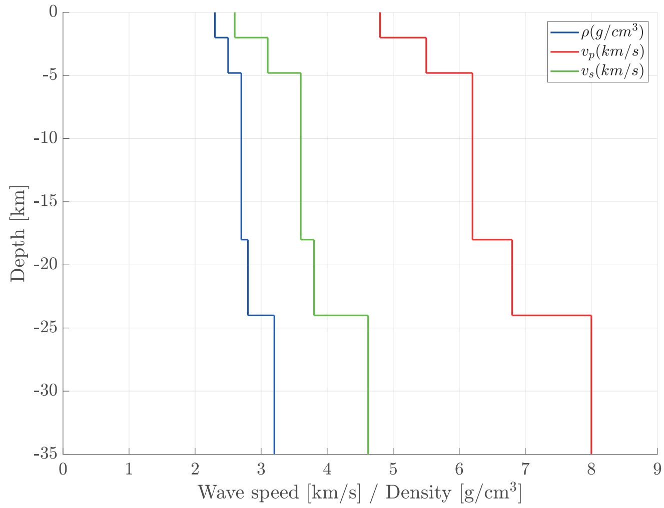
۴-۴-۲ مشخصات حل معکوس

برای شبیه‌سازی انتشار امواج در محیط ابتدا می‌بایست توابع گرین را برای ۶ مؤلفه‌ی لنگر لرزه‌ای (بخش ب-۱) به دست بیاوریم. برای این منظور، از نرم‌افزار اکسیترا[۴] استفاده کرده‌ایم [کوتَن، ۱۹۸۹]. نرم‌افزار اکسیترا از روش عدد موج گسسته[۵] برای محاسبه‌ی میدان تغییر مکان در اثر انتشار امواج الاستیک در محیط یک بُعدی چند لایه استفاده می‌کند [بوشون، ۱۹۸۱]. با در نظر گرفتن فاصله‌ی میان ایستگاه‌ها و صفحه‌ی گسل، توابع گرین را برای دوره‌ی زمانی $T = ۳۲\ s$ پس از شروع شکستگی و با نرخ نمونه برداری ۴ sps محاسبه کرده‌ایم. با توجه به قضیه‌ی نمونه‌برداری، بیشترین محتوای فرکانسی که در توابع گرین موجود است $f_{Nyq} = f_{samp}/۲ = ۲$ Hz می‌باشد. تعداد کل نمونه‌ها در توابع گرین شبیه‌سازی شده برابر با $n = T \times f_{samp} = ۱۲۸$ نمونه است. تعداد

[2] Spontaneous dynamic rupture
[3] Self-similar
[4] Axitra
[5] Discrete wave-number method (DWN)



(الف)



(ب)

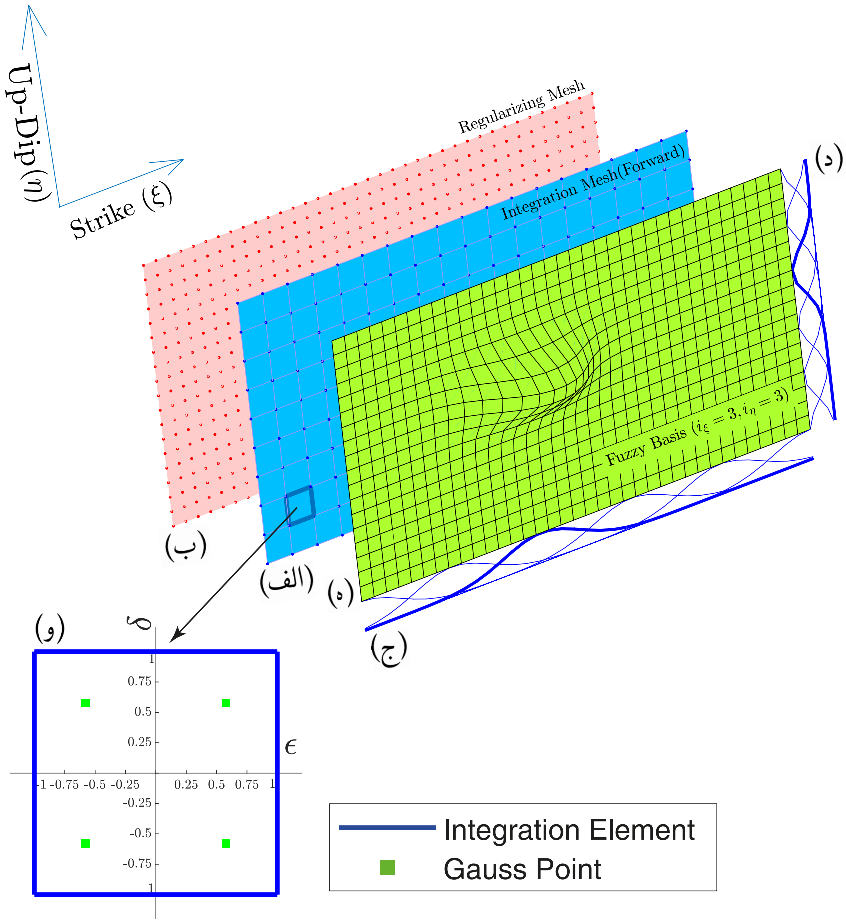
شکل ۴-۲: پیکره‌بندی مثال معیار SIV-inv1 مای و همکاران [۲۰۱۶]. (الف) نقشه‌ی هندسه‌ی چشمه-گیرنده، خط قرمز تصویر صفحه‌ی گسل را بر روی سطح زمین نمایش می‌دهد. کانون زلزله با ستاره‌ی قرمز رنگ مشخص شده است. مربع‌های سبز رنگ ایستگاه‌هایی را نشان می‌دهند که برای آن‌ها داده‌های شبیه‌سازی شده موجود است. مثلث‌های وارونه آبی رنگ، ایستگاه‌هایی را نشان می‌دهند که محققین برای آنها باید داده‌ها را پیش‌بینی کنند. (ب) مدل سرعتی مورد استفاده در مثال SIV-inv1، چگالی (آبی)، سرعت موج برشی (S) (خط سبز رنگ)، سرعت موج فشاری (P) (قرمز).

نمونه‌ها در طیف فوریه‌ی توابع گرین در حوزه‌ی فرکانسی نیز با تعداد نمونه‌ها در حوزه‌ی زمان برابر است و محدوده‌ی فرکانسی $-f_{Nyq}$ تا f_{Nyq} را شامل می‌شود. به دلیل اینکه توابع گرین سیگنال‌هایی حقیقی مقدار هستند، تنها نیمی از مقادیر این سیگنال، $n۲ = ۱۲۸/۲ = ۶۴$ در حوزه‌ی فرکانسی منحصر بفرد بوده و محدوده‌ی فرکانسی ۰ تا $f_{Nyq} = ۲$ Hz را پوشش می‌دهند و نیمه‌ی دیگر سیگنال در حوزه‌ی فرکانس، با تقارن نسبت به مبدأ، به نیمه‌ی مذکور وابسته است. گام نمونه‌برداری از طیف فوریه‌ی توابع گرین برابر $\Delta f = f_{Nyq}/n۲ = ۱/۳۲$ Hz می‌باشد. توجه کنید که برای بدست آوردن صحیح تابع چشمه، هر دو بخش حقیقی و موهومی تابع گرین باید در نظر گرفته شوند تا بتوانیم اطلاعات فاز و دامنه را معکوس نماییم.

به منظور مدلسازی و حل معکوس، از مختصات خودِ مثال SIV-inv1 استفاده کرده‌ایم، در این مثال، در راستای امتداد در محدوده‌ی $-۱۸\text{km} < \xi < +۱۸\text{km}$ و در راستای شیب، در محدوده‌ی $۲/۰۱۴\text{km} < \eta < ۲۰/۰۱۴\text{km}$ (جهت مثبت به سمت پایین-شیب است) قرار داریم. همچنان که در بخش (۴-۲) شرح دادیم، برای محاسبه‌ی انتگرال رابطه‌ی مستقیم از روش گاوس کوادریچر (ضمیمه‌ی آ) استفاده کرده‌ایم. هر یک از زیرگسل‌های مورد استفاده در انتگرال‌گیری رابطه‌ی مستقیم دارای ابعاد $۲\ km \times ۲\ km$ است و داخل هرکدام ۴ نقطه‌ی انتگرال‌گیری وجود دارد (شکل ۴-۳(و)). ما توابع گرین را برای تمامی نقاط انتگرال‌گیری گاوسی محاسبه نموده‌ایم (شکل‌های ۴-۳(الف) و ۴-۳(و)). این نقاط برای برآورد انتگرال در رابطه‌ی (۴-۷) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. نقاط مورد استفاده در منظم‌سازی بر روی همان گسل، اما بر روی یک مش منظم و با فواصل یکپارچه‌ی $۱\ km \times ۱\ km$ قرار گرفته‌اند، که برای برآورد رابطه‌ی (۴-۱۱) استفاده شده است (شکل ۴-۳(ب)).

چنانکه در بخش (۴-۲) توضیح داده شد، در هر فرکانس، تغییرات مکانی توزیع لغزش بر روی توابع پایه‌ی دوبعدی تطبیقی فازی بسط داده می‌شود. این توابع دوبُعدی از ترکیب توابع عضویت یک بُعدی گاوسی که جهت‌های امتداد و شیب را پوشش داده‌اند، نتیجه می‌شود. در این مرحله، به طور دلخواه در هر یک از ابعاد گسل از ۶ تابع پایه‌ی فازی استفاده کرده‌ایم، $N_\xi = N_\eta = ۶$. در عین حال، در بخش ۵-۳ در مورد اثر تعداد توابع عضویت بر حل معکوس بحث خواهیم کرد.

در حل این مثال، تقسیم‌بندی فعلی گسل در تمامی فرکانس‌ها یکسان است و با استفاده از روش تقسیم‌بندی شبکه‌ای (شکل ۳-۳) به دست می‌آید. شکل‌های ۴-۳(ج) و ۴-۳(د) توابع عضویت یک بُعدی را به ترتیب در جهت‌های امتداد و در بالا-شیب نشان می‌هند. شکل ۴-۳(و) تابع پایه‌ی $\bar{W}_{i\xi=۳,i\eta=۳}$ را در گام اول آموزش دوگانه نشان می‌دهد که از ترکیب تابع عضویت سوم در راستای امتداد و تابع عضویت سوم در راستای شیب به دست آمده است.



شکل ۴-۳: (الف) زیرگسل‌های انتگرال‌گیری (نقاط آبی)، هر یک شامل ۴ نقطه‌ی گاوسی هستند (مربع آبی در (و))، که در آن‌ها توابع گرین محاسبه شده است و رابطه‌ی مستقیم با کمک آنها برآورد شده است. (ب) مجموعه نقاط منظم‌سازی که با فاصله‌ی $۱\ km \times ۱\ km$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند و به منظور برآورد رابطه‌ی (۴-۱۱) استفاده شده‌اند. (ج) توابع عضویت گاوسی برای متغیر طول در جهت امتداد (ξ) در گام اول آموزش دوگانه. (د) توابع عضویت گاوسی برای متغیر طول در جهت شیب (η)، در گام اول آموزش دوگانه. این مثال نشان می‌دهد که چگونه با استفاده از توابع عضویت فازی، صفحه‌ی گسل در دو جهت امتداد و شیب، هر یک توسط ۶ تابع عضویت گسسته شده است. (ه) تابع پایه‌ی اولیه برای بسط لغزش $\bar{W}_{i\xi=۳,i\eta=۳}$ که از ترکیب سومین تابع عضویت در جهت امتداد و سومین تابع عضویت در جهت شیب به دست آمده است و یکی از $۳۶ = ۶ \times ۶$ تابع پایه‌ی اولیه‌ای است که برای بسط لغزش در هر یک از فرکانس‌های حل معکوس استفاده شده است. (و) المان انتگرال‌گیری به همراه ۴ نقطه‌ی گاوسی در داخل آن.

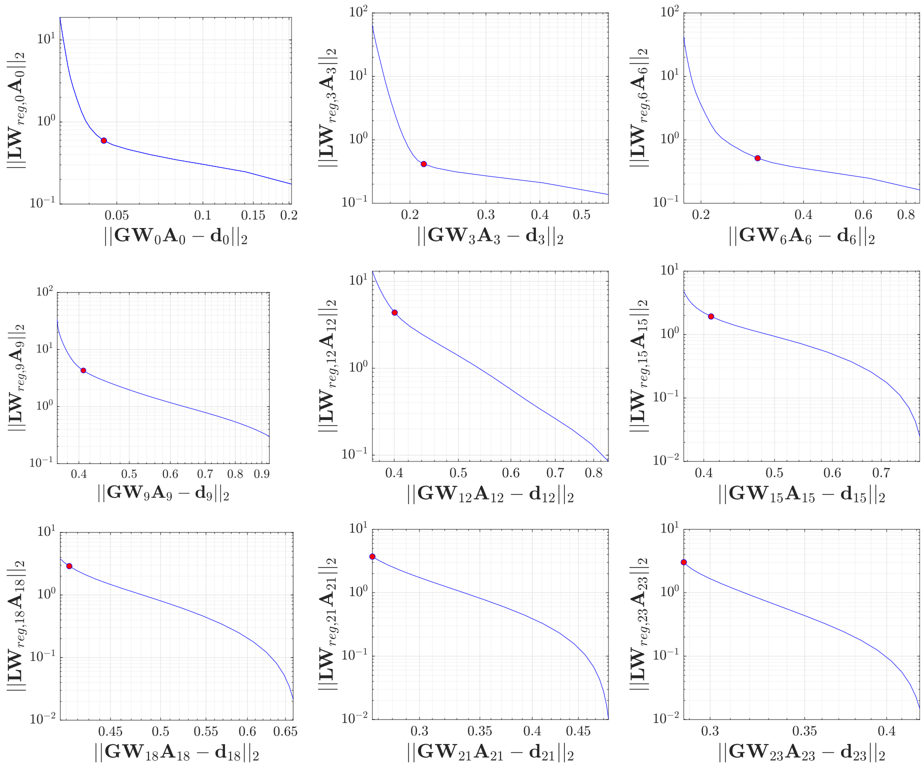
۴-۴-۳ حل معکوس

با حل معکوس، جواب معادله‌ی نرمال (رابطه‌ی ۴-۱۶) را برای تمامی نقاط فرکانسی به دست می‌آورد. در روش پیشنهادی این رساله، جستجوی کمینه مقدار تابع هزینه به صورت مستقل برای هر فرکانس صورت می‌گیرد. پیش از شروع روند حل معکوس، مقدار بهینه‌ی پارامتر منظم‌سازی (α) را برای هر فرکانس با فرض توابع عضویت فازی در گام اول آموزش دوگانه، در نظر می‌گیریم. در (شکل ۴-۴)، منحنی‌های L-curve برای نقاط فرکانسی مختلف ترسیم شده‌اند. در فرکانس‌های پائین، منحنی‌های L-curve گوشه‌ی تیزتر با انحنای بیشتری دارند (در این مثال به فرکانس‌های $f \lesssim ۱۱/۳۲ \approx ۰/۳$ Hz بنگرید)، که نشان‌دهنده‌ی قابلیت بهتر در یافتن مدل‌هایی هَموار با قابلیت تقریب مناسب داده‌هاست. با این حال، تیزگوشه بودن منحنی‌های L-curve با افزایش فرکانس، کاهش می‌یابد، که نشان می‌دهد یافتن نقطه‌ی با تعادل مناسب بین نُرم باقیمانده و مدل هَموار در فرکانس‌های بالا دشوار است (در این مثال $f \gtrsim ۱۱/۳۲ \approx ۰/۳$ Hz).

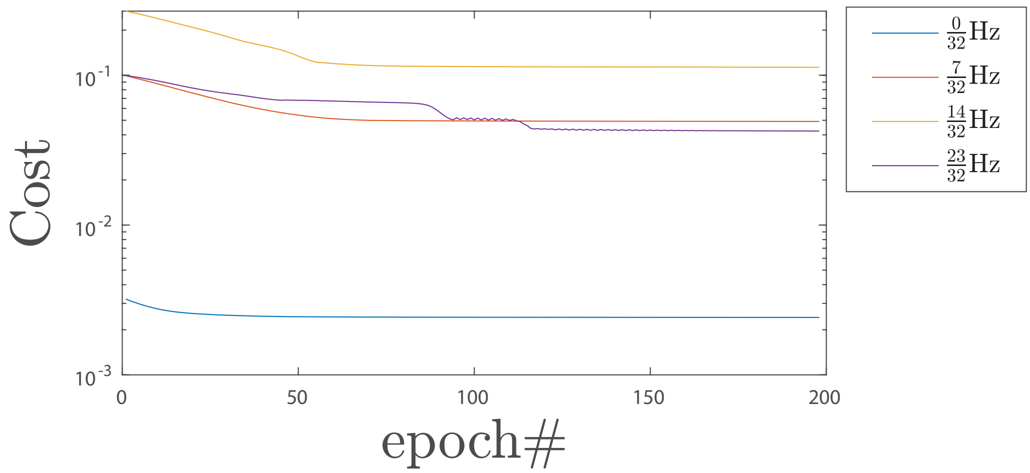
وقتی که مقدار (α) تعیین شد، مقادیر پارامترهای انفیس (یعنی توابع پایه‌ی تطبیقی و وزن هرکدام از آنها) را از روی داده‌ها و با استفاده از روش آموزش دوگانه‌ی تشریح شده در بخش (۴-۳) به دست می‌آوریم. دقت کنید که مقدار (α) در گام اول فرآیند آموزش، پیش از آغاز فرآیند آموزش دوگانه تعیین شده و در حین آموزش تغییر نمی‌کند. چنانچه مقدار (α) را در هرگام آموزش تغییر بدهیم، شبکه‌ی انفیس را با کمینه کردن توابع هزینه‌ی متفاوت در گام‌های مختلف آموزش می‌دهیم که این امر ممکن است موجب عدم همگرایی مدل و ناپایدار شدن آموزش شود. در مورد ثابت بودن (α) در بخش ۵-۶ بحث خواهیم کرد.

پس از تعیین مقدار (α)، تمامی پارامترهای انفیس با کمینه‌سازی تابع خطا (رابطه‌ی ۴-۱۷) با استفاده از روش آموزش دوگانه تعیین می‌شوند.

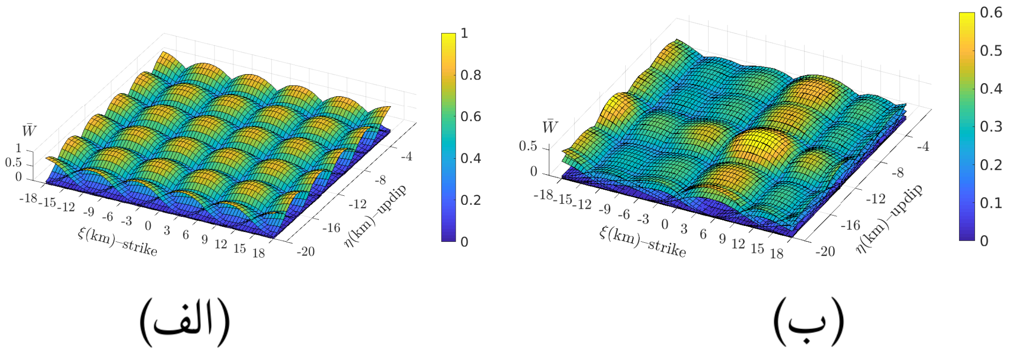
روش حل معکوس مبتنی بر آموزش دوگانه زمانی پایان می‌یابد که تابع خطا به نقطه‌ی سکون برسد، و رسیدن به نقطه‌ی سکون بدین معناست که پارامترهای تخمین‌زننده‌ی لغزش به سکون رسیده‌اند (شکل ۴-۵). شکل (۴-۶) توابع پایه‌ی بسط فازی با دو متغیر ورودی را برای فرکانس صفر (توزیع لغزش استاتیکی)، $\bar{\mathbf{W}}_{\frac{۱}{۳۲}}$ در ابتدا و انتهای فرآیند آموزش نشان می‌دهد.



شکل ۴-۴: منحنی‌های L-curve نُرم‌باقیمانده ($||\mathbf{GF}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j} - \mathbf{d}_{\omega_j}||_۲$) را در مقابل هَموار بودن تغییرات لغزش ($||\mathbf{LW}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}||_۲$)، برای تعدادی از نقاط فرکانسی در محدوده‌ی ۰ تا $\frac{۲۳}{۳۲} \approx$ ۰/۷۲ Hz نشان می‌دهند. در این حل مجموعاً از ۳۶ تابع پایه برای بسط لغزش در هر فرکانس استفاده شده است ($N_\xi = ۶$، $N_\eta = ۶$). در فرکانس‌های پایین، نقطه‌ی دارای انحنای بیشنه مشخص تر از فرکانس‌های بالاست که حاکی از این است که داده‌ها در فرکانس‌های پایین قابلیت بهتری در انتخاب یک مدل هموار می‌دهند. نقطه‌ی قرمز رنگ بر روی منحنی، دارای بیشترین انحناست و مقدار پارامتر منظم‌سازی (α) به وسیله‌ی آن مشخص می‌شود.



شکل ۴-۵: تغییرات تابع هزینه، برای فرکانس‌های منتخب $\frac{۰}{۳۲} = ۰$ Hz، $\frac{۷}{۳۲} \approx ۰/۲۲$ Hz، $\frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴$ Hz و $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰/۷۲$ Hz پس از ۲۰۰ دوره‌ی آموزش با استفاده از ۳۶ تابع پایه ($N_\xi = ۶$، $N_\eta = ۶$). توجه کنید که همگرایی به نقطه‌ی سکون در فرکانس‌های پایین با سرعت بیشتری نسبت به فرکانس‌های بالاتر صورت می‌گیرد.



شکل ۴-۶: توابع پایه‌ی انفیس با دو ورودی، $\bar{W}_{i_\xi, i_\eta}$ در فرکانس $f = ۰$ Hz. (الف) در آغاز فرآیند آموزش. (ب) در پایان فرآیند آموزش.

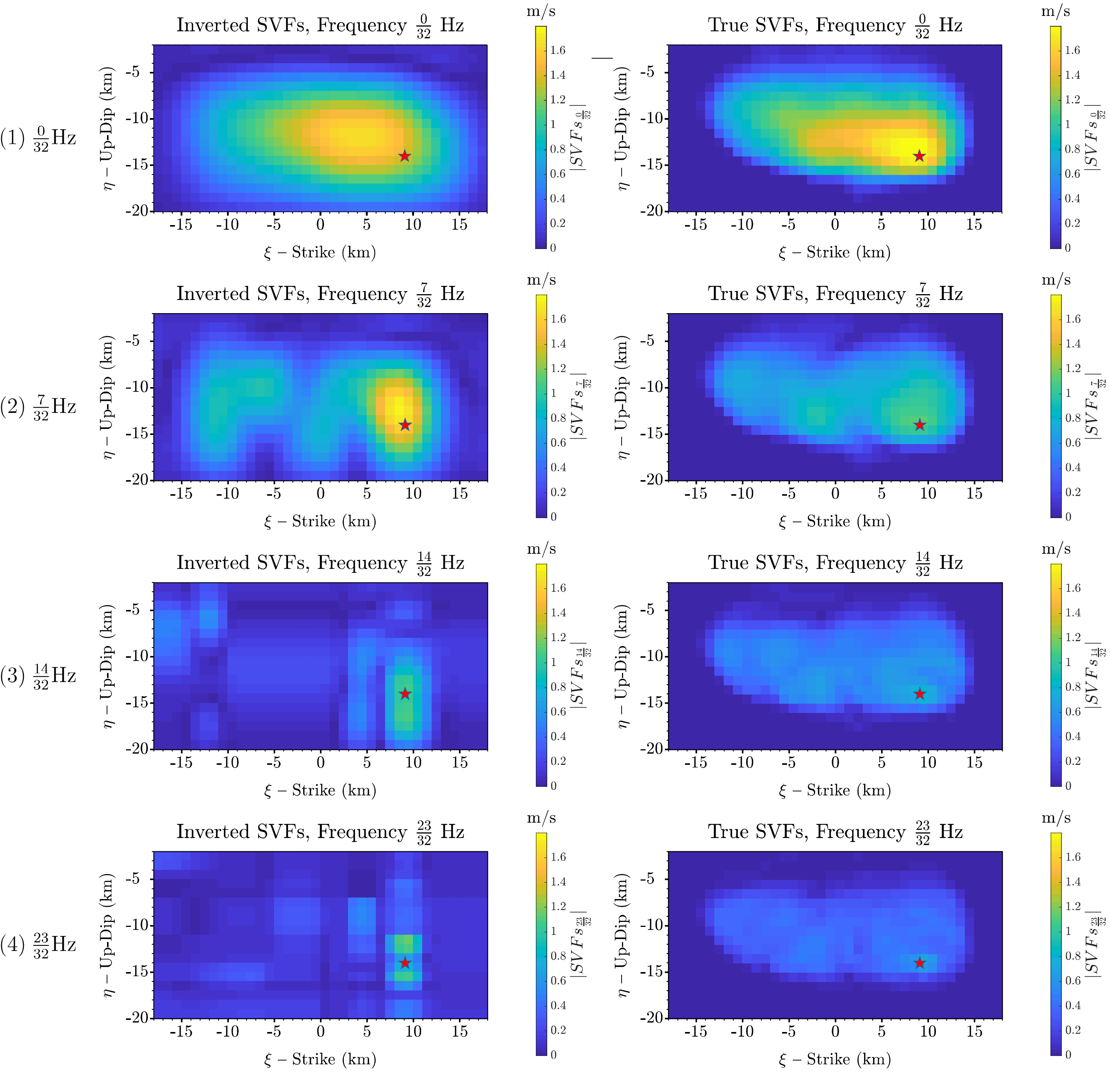
۴-۴-۴ نتایج

پس از انجام حل معکوس، نوبت به ارائه‌ی نتایج آن می‌رسد. به منظور کنترل صحت نتایج به دست آمده از حل معکوس، مقادیر آن را با مدل درست مثال SIV-inv1، در حوزه‌ی فرکانسی مقایسه می‌کنیم. در این قسمت همچنین تطابق شکل موج‌ها مقایسه می‌گردد. شکل ۴-۷ مقایسه‌ی توزیع مکانی لغزش را میان جواب درست و جواب به دست آمده از حل معکوس، در فرکانس‌های منتخب بین ۰ Hz تا ۰/۷۲ Hz را نشان می‌دهد. توجه کنید که لغزش در $f = ۰$ Hz نشان دهنده‌ی لغزش ماندگار بر روی گسل است که به تغییر مکان ماندگار روی زمین مربوط می‌شود و برابر با انتگرال سطح زیر توابع زمان منبع در نقاط مختلف واقع بر روی گسل است.

در شکل (۴-۷) مقایسه‌ی عینی میان لغزش درست (ب) و حل معکوس (الف) نشانگر آن است که تطابق میان دو جواب در فرکانس‌های کم خوب است، اما از میزان این انطباق با افزایش فرکانس حل کاسته می‌شود. با این حال در تمامی فرکانس‌ها، حل معکوس قادر است که محلی که بیشترین انرژی از آن منتشر می‌شود را به دست آورد. این نتایج نشان دهنده‌ی این است که اگرچه در فرکانس‌های پایین جوابها خوب است، برای فرکانس‌های بالا همچنان امکان بهبود وجود دارد.

تابع نرخ لغزش در حوزه‌ی زمان، $SVF(\xi,\eta,t)$ را می‌توان به طور مستقیم از روی طیف آن $SVF(\xi,\eta,\omega)$، با استفاده از تبدیل معکوس فوریه بازسازی کرد. سپس می‌توان انطباق میان نتیجه‌ی معکوس (شکل ۴-۸الف) و جواب درست در حوزه‌ی زمان (شکل ۴-۸ب) را در نقاطی منتخب بر روی گسل مقایسه نمود. به دلیل اینکه بیشینه‌ی فرکانس مورد استفاده در حل معکوس ما برابر با $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰/۷۲$ Hz است، مقایسه میان توابع نرخ لغزش را برای مولفه‌های کمتر از این مقدار انجام می‌دهیم (شکل ۴-۸ج). مقایسه‌ی کیفی در شکل ۴-۸ج نشان می‌دهد که انطباق میان توابع نرخ لغزش به دست آمده از حل معکوس (خط سبز رنگ) و توابع نرخ لغزش درست، مناسب است. توجه کنید که توابع نرخ لغزش دارای نوسانات و پَس‌لغزش[۶] (نرخ لغزش منفی) هستند که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. بخشی از این سرعت لغزش منفی به دلیل در نظر گرفتن تعداد محدود از جملات در سری فوریه و حذف سایر مؤلفه‌هاست و در حل معکوس‌هایی که در حوزه‌ی فرکانس انجام می‌شوند، به ناچار وجود دارند [برای مثال فَن و همکاران، ۲۰۱۴]. همچنین به دلیل استفاده از تعداد محدود توابع پایه، تقریب تابعی دارای عدم دقت و در نتیجه پَس‌لغزش وجود خواهد داشت و در واقع می‌توان گفت که این پایدار بودن حل و استفاده از توابع پایه‌ی کمتر، پس لغزش را تشدید می‌کند. لازم به ذکر است که روش ما برای جلوگیری از بیش‌برازش طراحی شده است و در نتیجه انتظار نداریم تطابق کامل وجود داشته باشد.

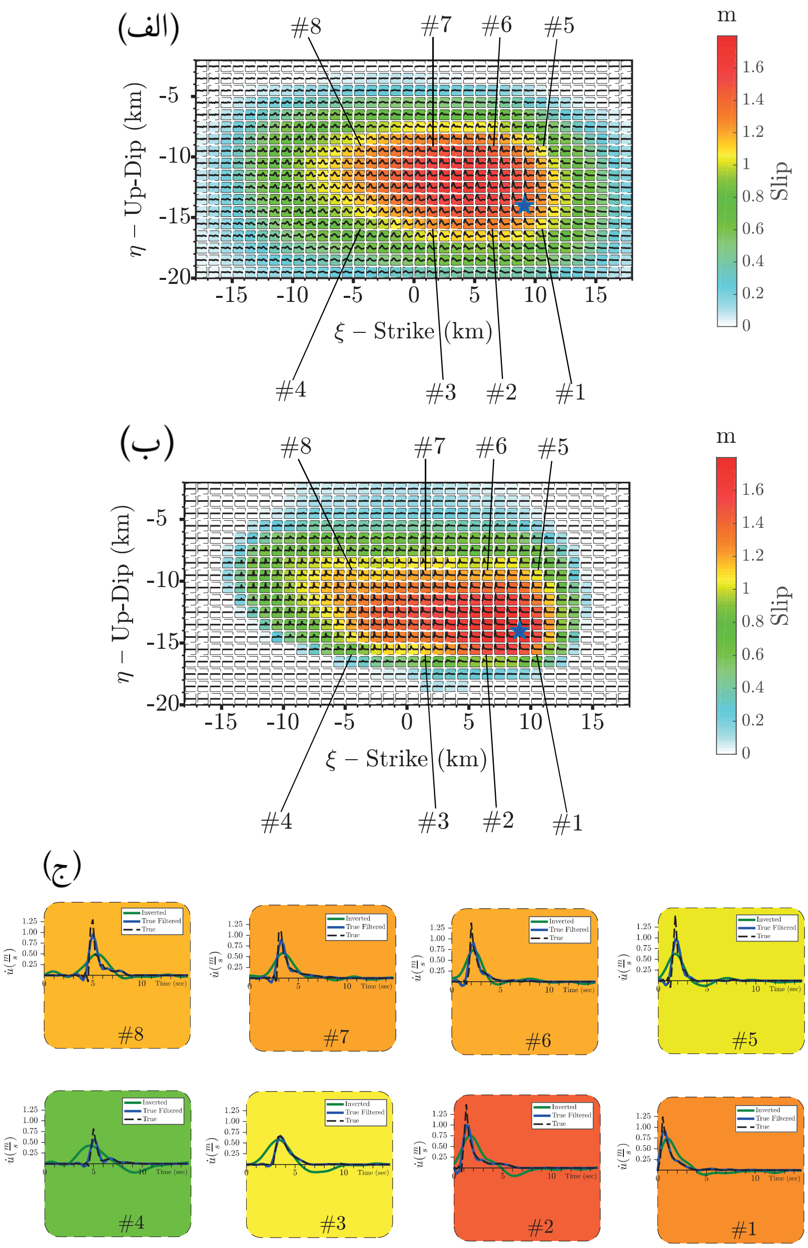
[6] Back-slip



(الف)

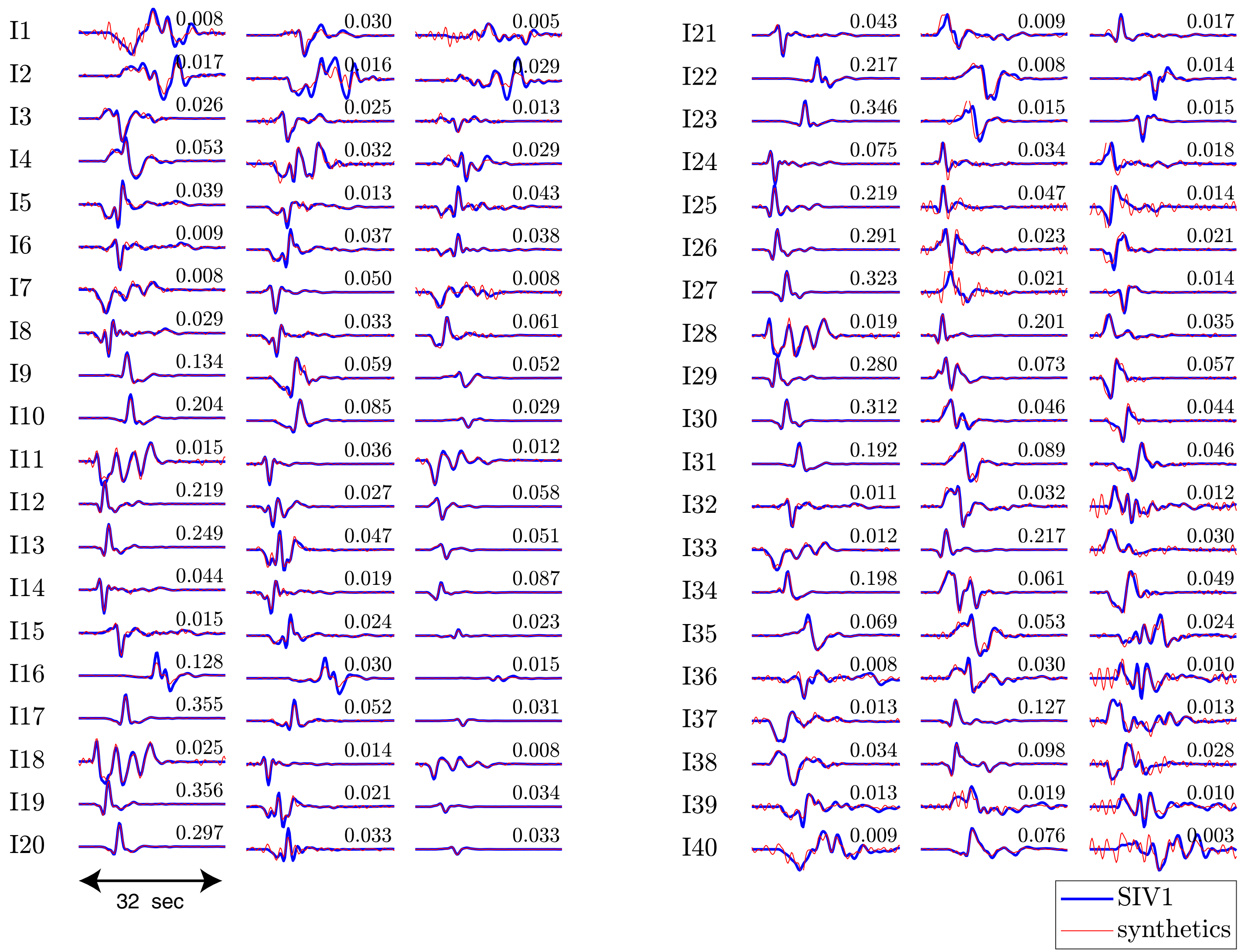
(ب)

شکل ۴-۷: مقایسه میان تغییرات مکانی طیف سرعت چشمه، یا تابع نرخ لغزش معکوس شده (الف، راست) و صحیح (ب، چپ) در فرکانس‌های منتخب: (۱) $\frac{0}{32} = 0$ Hz، (۲) $\frac{7}{32} = 0$ Hz، (۳) $\frac{14}{32} = 0$ Hz، (۴) $\frac{23}{32} = 0$ Hz. توابع لغزش در فرکانس‌های پایین به خوبی به دست آمده‌اند، اما در فرکانس‌های بالا دارای دقت کمتری هستند. در همه‌ی فرکانس‌هااز تعداد یکسانی توابع عضویت در دو جهت امتداد و شیب استفاده کرده‌ایم، $N_\xi = N_\eta = 6$، که در مجموع ۳۶ تابع عضویت می‌شوند.



شکل ۴-۸: (الف) محل قرارگیری ۸ نقطه بر روی صفحه‌ی گسل که در آن‌ها تابع نرخ لغزش درست و معکوس شده را مقایسه می‌کنیم. در زمینه‌ی شکل، لغزش استاتیک ($f = ۰$ Hz) ترسیم شده است. توابع نرخ لغزش معکوس شده در مربع‌های داخلی ترسیم شده‌اند. (ب) محل قرار گیری ۸ نقطه‌ی مقایسه، لغزش درست از مثال SIV-inv1 در زمینه ترسیم شده است. (ج) نمایش بزرگتر از ۸ سلول مقایسه‌ی نرخ لغزش در شکل‌های (الف) و (ب). رنگ پس زمینه‌ی هر مربع نشان‌دهنده‌ی لغزش درست (ب) است. بیشینه فرکانس مورد استفاده در حل معکوس ما $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰/۷۲$ Hz می‌باشد. بنابراین در شکل (ج) نرخ لغزش اصلی (خط چین با رنگ مشکی)، نرخ لغزش با اعمال فیلتر پایین‌گذر با فرکانس گوشه‌ی ۰/۷۲ Hz (خط آبی)، و نرخ لغزش معکوس شده (با رنگ سبز) را ترسیم کرده‌ایم.

شکل ۴-۹ برازش میان داده‌های شکل موج اصلی مثال SIV-inv1 و شکل‌موج‌های مستقیم تولید شده توسط حل ما را نشان می‌دهد. در این مرحله نیز، چون بیشترین فرکانس مورد نظر در حل برابر $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰/۷۲$ Hz می‌باشد، مقایسه برای فرکانس‌های کمتر از آن صورت گرفته است. این مقایسه نشان می‌دهد که مشخصات اصلی به خوبی به دست آمده‌اند، در عین حال برخی از شکل موج‌ها دارای نوسانات نامطلوب با فرکانس بالای هستند.



شکل ۴-۹: مقایسه میان داده‌های شکل موج SIV-inv1 (آبی) و داده‌های تولید شده با توزیع لغزش به دست آمده از حل معکوس (قرمز)، برای محدوده‌ی فرکانسی $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰/۷۲$ Hz. مشخصات اصلی شکل موج باز تولید شده‌اند، در عین حال شکل موج‌های تولید شده توسط مدل ما دارای نوسانات نامطلوب هستند.

۴-۵ توسعه‌ی روش پیشنهادی برای حل معکوس تابع چشمه در هر دو راستای امتداد و شیب

به منظور سهولت درک مطلب، رابطه‌ی مستقیم در بخش ۴-۲ (رابطه‌ی ۴-۶) را با فرض وقوع لغزش فقط در راستای امتداد گسل ارائه کردیم؛ در واقع فرض کردیم که فقط یک گسلش با سازوکار امتداد لغز امکان وقوع دارد. در یک زمین‌لرزه‌ی واقعی، لغزش می‌تواند در هر راستای دلخواهی بر روی گسل اتفاق بیفتد و الگوریتم حل معکوس بایستی بتواند لغزش را در دو امتداد متعامد فرمول‌بندی کند. در این قسمت، رابطه‌ی مستقیم را با فرض وقوع لغزش در هر دو راستای امتداد و بالا-شیب توسعه می‌دهیم. بر اساس رابطه‌ی ۴-۱ برای هر یک از جهت‌های امتداد و بالا-شیب می‌توان توابع برداری ۴-۱۸ و ۴-۱۹ را نوشت.

$$u_s(\xi,\eta,\omega_j) = \sum_{i\xi=1}^{N_\xi}\sum_{i\eta=1}^{N_\eta} \bar{W}_{s,i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi,\eta)A_{s,i\xi,i\eta,\omega_j} \tag{۴-۱۸}$$

$$u_d(\xi,\eta,\omega_j) = \sum_{i\xi=1}^{N_\xi}\sum_{i\eta=1}^{N_\eta} \bar{W}_{d,i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi,\eta)A_{d,i\xi,i\eta,\omega_j} \tag{۴-۱۹}$$

همانند رابطه‌ی ۴-۲، $\bar{W}_{s,i\xi,i\eta,\omega_j}$ و $\bar{W}_{d,i\xi,i\eta,\omega_j}$ توابع پایه‌ی فازی، به ترتیب برای مؤلفه‌های u_s و u_d هستند و $A_{s,i\xi,i\eta,\omega_j}$ و $A_{d,i\xi,i\eta,\omega_j}$ دامنه‌ی توابع پایه می‌باشند. در گام بعدی، قضیه‌ی معرّف زلزله‌شناسی را بر حسب تابع چشمه‌ی بسط داده شده در بالا (روابط ۴-۱۸ و ۴-۱۹) می‌نویسیم. بر این اساس، $u_n^o(\mathbf{x},\omega)$ تابعی از لغزش بر روی گسل است.

$$\begin{aligned} u_n^o(\mathbf{x},\omega) &= \int_\Sigma \Big(v_{si}u_s(\xi,\eta,\omega) + v_{di}u_d(\xi,\eta,\omega)\Big) c_{ijpq}\nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np}(\mathbf{x};\xi,\eta,\omega)d\Sigma \\ &= \int_\Sigma u_s(\xi,\eta,\omega)v_{si}c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x};\xi,\eta,\omega)d\Sigma \\ &+ \int_\Sigma u_d(\xi,\eta,\omega)v_{di}c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x};\xi,\eta,\omega)d\Sigma \end{aligned} \tag{۴-۲۰}$$

که در آن $G_{np}(\mathbf{x};\xi,\eta,\omega)$ همان تابع گرین است که در رابطه‌ی ۴-۳ مورد استفاده قرار گرفت، همانند رابطه‌ی ۴-۴ تابع گرین را برای دو مؤلفه‌ی در راستای امتداد و راستای بالا-شیب، به صورت زیر می‌نویسیم:

$$G'_{sn} = v_{si} c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np} \quad (۲۱-۴)$$

$$G'_{dn} = v_{di} c_{ijpq} \nu_j \frac{\partial}{\partial(\xi_q)} G_{np} \quad (۲۲-۴)$$

با جایگزین کردن توابع گرین از روابط ۴-۲۱ و ۴-۲۲ در قضیه‌ی معرّف، در حوزه‌ی فرکانسی (رابطه‌ی ۴-۲۰)، رابطه اخیر به شکل زیر در می‌آید:

(۲۳-۴)

$$u_n^o(\mathbf{x}, \omega_j) = \int_\Sigma u_s(\xi, \eta, \omega_j) G'_{sn}(\mathbf{x}; \xi, \eta, \omega_j) d\Sigma + \int_\Sigma u_d(\xi, \eta, \omega_j) G'_{dn}(\mathbf{x}; \xi, \eta, \omega_j) d\Sigma.$$

حال با جایگزین کردن تقریب فازی u_s و u_d (روابط ۴-۱۸ و ۴-۱۹) در قضیه‌ی معرّف (رابطه‌ی ۴-۲۳) خواهیم داشت:

$$u_n^o(\mathbf{x}, \omega_j) = \underbrace{\left(\sum_{i\xi=1}^{N_\xi} \sum_{i\eta=1}^{N_\eta} \int_\Sigma \bar{W}_{s,i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi, \eta) G'_{sn}(\mathbf{x}; \xi, \eta, \omega_j) d\Sigma \right)}_{(\mathbf{GW})_{s,\omega_j}} A_{s,i\xi,i\eta,\omega_j} + \underbrace{\left(\sum_{i\xi=1}^{N_\xi} \sum_{i\eta=1}^{N_\eta} \int_\Sigma \bar{W}_{d,i\xi,i\eta,\omega_j}(\xi, \eta) G'_{dn}(\mathbf{x}; \xi, \eta, \omega_j) d\Sigma \right)}_{(\mathbf{GW})_{d,\omega_j}} A_{d,i\xi,i\eta,\omega_j} \quad (۲۴-۴)$$

رابطه‌ی مستقیم ۴-۲۴ را می‌توان به آسانی به صورت ماتریسی در هر فرکانس نوشت:

$$\mathbf{d}_{\omega_j} = (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} \mathbf{A}_{s,\omega_j} + (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \mathbf{A}_{d,\omega_j} = \begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \quad (۲۵-۴)$$

برای منظم‌سازی و حل معکوس نیز، همانند بخش ۴-۳ عمل می‌کنیم. همانند رابطه‌ی ۴-۱۵ می‌توان لغزش در دو راستا را با دو شرط: ۱) برازش داده‌های شبیه‌سازی شده با داده‌های مشاهده شده مناسب باشد، ۲) لاپلاسین توزیع مکانی لغزش کمینه شود، به شکل زیر مقیّد کرد:

$$\left\| \begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} - \mathbf{d}^o_{\omega_j} \right\|_۲ < \delta$$

$$\min \quad \left\| \mathbf{L} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{s,\omega_j} & \mathbf{W}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \right\|_۲ \tag{۴-۲۶}$$

جواب دستگاه نامعادلات ۴-۲۶ را می‌توان به آسانی با استفاده از روش کلاسیک منظّم‌سازی تیخونوف [هنسن، ۲۰۰۵]، با اضافه کردن پارامتر میرائی α به دست آورد.

$$\min \left\| \begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \\ \alpha \mathbf{LW}_{s,\omega_j} & \alpha \mathbf{LW}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\omega_j} \\ ۰ \end{bmatrix} \right\|_۲^۲ \tag{۴-۲۷}$$

برای انتخاب پارامتر α در رابطه‌ی فوق ۴-۲۷ می‌توان از نمودار L-curve استفاده کرد. برای آموزش دوگانه، همچون بخش ۴-۳ باید میزان خطا را در دو گام، یک گام خطی و یک گام غیرخطی کمینه کرد. برای گام خطی معادله‌ی نُرمال به شکل زیر است:

$$\Big(\begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \end{bmatrix} + \alpha^۲ \begin{bmatrix} \mathbf{LW}_{s,\omega_j} & \mathbf{LW}_{d,\omega_j} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{LW}_{s,\omega_j} & \mathbf{LW}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \Big) \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \end{bmatrix}^T \mathbf{d}_{\omega_j} \tag{۴-۲۸}$$

در گام غیر خطی، بایستی گرادیان تابع خطا نسبت به پارامترهای مدل محاسبه گردد. تابع خطا از طریق

رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

(۴-۲۹)

$$Cost_{FIM} = \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} (\mathbf{GW})_{s,\omega_j} & (\mathbf{GW})_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} - \mathbf{d}_{\omega_j} \right\|_۲^۲}_{Cost_{data}} + \alpha^۲ \underbrace{\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{LW}_{s,\omega_j} & \mathbf{LW}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{s,\omega_j} \\ \mathbf{A}_{d,\omega_j} \end{bmatrix} \right\|_۲^۲}_{Cost_{smooth}}$$

روش آموزش دوگانه بین گام خطی (رابطه‌ی ۴-۲۸) برای محاسبه‌ی $\mathbf{A}_{s,\omega_j}$ و $\mathbf{A}_{d,\omega_j}$، و گام غیر خطی برای یافتن کمینه‌ی خطا (رابطه‌ی ۴-۲۹) با استفاده از روش بیشترین شیب، تکرار می‌شود. پس از چندین بار تکرار، حل به نقطه‌ی ایستا می‌رسد که معادل جوابی مناسب برای تابع لغزش است.

فصل ۵

بحث و بررسی

۵-۱ مقدمه

در فصل (۴) روش پیشنهادی این رساله را برای حل معکوس سینماتیکی لغزش بر روی گسل ارائه کردیم. در این فصل می‌خواهیم به بررسی مزایا، محدودیت‌ها و امکان بالقوّه‌ی بهبود این روش بپردازیم. مزیّت اصلی روش پیشنهادی این است که با استفاده از آن، امکان کاهش دادن تعداد پارامترهایی که در هر فرکانس، تغییرات مکانی لغزش را توصیف می‌کنند، وجود دارد. بنابراین با کمک این روش می‌توان فضایِ تهیِ مدل را کوچک نمود و میزان ناپایداری حل معکوس را کاهش داد. در مباحث این فصل از رساله، از روش تعمیم یافته‌ی تجزیه‌ی مقادیر تکین[۱] (GSVD) به منظور بررسی میزان مؤثر بودن روش حل معکوس فازی در کاهش بد وضع بودن مسئله استفاده می‌کنیم. به طور خاص، نشان خواهیم داد که میزان بد وضع بودن مسئله چگونه به تعداد توابع پایه‌ی فازی و نوفه در داده‌ها بستگی دارد. همچنین نشان می‌دهیم که ویژگیِ تطبیقی بودن روش حل معکوس فازی، چگونه به یافتن مدل‌های لغزش بهتر، در حین جستجو در هر دو فضای مدل و فضای داده منجر خواهد شد. در مورد نحوه‌ی تغییرات پارامتر منظّم‌سازی، α، در طول فرآیند آموزش تغییر می‌کند و نشان می‌دهیم که ثابت فرض کردن α، یک فرض معتبر است. همچنین در مورد اثر مِش‌بندی در پایداری روش بحث خواهیم نمود و توازن میان پایداری و وضوح را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در نهایت، عملکرد روش پیشنهادی را با استفاده از روش مقیاس کردن چند بُعدی[۲] (MDS)، معرفی شده توسط [رازافیندراکاتو و همکاران، ۲۰۱۵] مورد بررسی قرار خواهیم داد.

[1] Generalised singular value decomposition

[2] Multi-dimensional scaling

۵-۲ روش تجزیه‌ی مقادیر تکین تعمیم یافته اعمال شده بر روی روش حل معکوس فازی

گام خطی در روش آموزش دوگانه، که در آن منظّم‌سازی تیخونوف اعمال شده است را در نظر بگیرید. ماتریس معادله‌ی خطی رابطه‌ی (۴-۱۶) را می‌توان با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین تعمیم یافته (GSVD) [برای مثال رجوع کنید به آستِر و همکاران، ۲۰۱۸] بسط داد. تجزیه‌ی $\mathbf{GW}_{\omega_j}$ و $\mathbf{LW}_{\omega_j}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\mathbf{GW}_{\omega_j} = \mathbf{U\Lambda X^T} \tag{۵-۱}$$

$$\mathbf{LW}_{reg,\omega_j} = \mathbf{VMX^T} \tag{۵-۲}$$

در (GSVD)، $\mathbf{U}$ ماتریس مربعی و متعامد با $(N_s \times ۳) \times (N_s \times ۳)$ درایه است که یک پایه برای بسط فضای داده می‌سازند، همچنین $\mathbf{V}$ یک ماتریس با ابعاد متعامد با $N_{reg} \times N_{reg}$ درایه می‌باشد که برای توصیف لغزش بر روی نقاط منظّم‌سازی استفاده می‌شوند. با استفاده از نقاط منظّم‌سازی، میزان هَموار بودن لغزش برآورد می‌شود. $\mathbf{X}$ ماتریس غیرِ تکین[۳] با ابعاد $(N_\xi \times N_\eta) \times (N_\xi \times N_\eta)$ می‌باشد که تعداد پارامترهای آن برابر با تعداد پارامترهای خطی است که در جستجوی آن می‌باشیم، در اینجا، پارامترهای خطی معادل با دامنه‌ی توابع پایه‌ی فازی است که جهت توصیف مکانی لغزش به کار می‌روند. $\mathbf{\Lambda}$ و $\mathbf{M}$ ماتریس‌های قطری هستند که درایه‌های آنها با ترتیب $۰ \leq \Lambda_{۱,۱} \leq \Lambda_{۲,۲} \leq \ldots \leq ۱$ و $M_{۱,۱} \geq M_{۲,۲} \geq \ldots \geq ۰$ قرار گرفته‌اند. درایه‌های قطری $\mathbf{\Lambda}$ و $\mathbf{M}$ را با λ_i و μ_i نمایش می‌دهیم.

اکنون می‌توان روابط (۵-۱ و ۵-۲) را در رابطه‌ی نُرمال (۴-۱۶) جایگذاری کرد:

$$(\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{\Lambda} + \alpha^۲\mathbf{M}^T\mathbf{M})\mathbf{X}^T\mathbf{A}_{\omega_j} = \mathbf{\Lambda}^T\mathbf{U}^T\mathbf{d}_{\omega_j} \tag{۵-۳}$$

[۳] در جبر خطی ماتریس تکین به ماتریسی که قابل وارون‌سازی نیست گفته می‌شود، بنابراین ماتریس غیرِ تکین معکوس پذیر می‌باشد.

ماتریس $\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{\Lambda} + \alpha^۲\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ که در سمت چپ رابطه‌ی (۵-۳) قرار گرفته‌است، یک ماتریس قطری است. چنانچه تعریف کنیم:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}^T\mathbf{A}_{\omega_j} \quad (۵\text{-}۴)$$

و برای مقادیر تکین تعمیم‌یافته، γ_i، نیز داشته باشیم،

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \quad (۵\text{-}۵)$$

می‌توان $\mathbf{x}$ را از رابطه‌ی (۵-۶) به دست آورد:

$$x_i = \frac{\gamma_i^۲}{\gamma_i^۲ + \alpha^۲}\frac{\mathbf{U^T_{:,i}d_{\omega_j}}}{\lambda_i} \quad (۵\text{-}۶)$$

رابطه‌ی (۵-۶) پارامترهای مدل مورد نظر، که همان دامنه‌ی توابع پایه‌ی فازی ($\mathbf{A}_{\omega_j}$) هستند را در مختصات تبدیل یافته‌ی x_i به دست می‌دهد.

بر مبنای موارد فوق، اکنون می‌توان $Cost_{data} = \left\|\mathbf{d}_{\omega_j} - \mathbf{G}\mathbf{W}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}\right\|^۲$ و $Cost_{smooth} = \left\|\mathbf{L}\mathbf{W}_{reg,\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}\right\|^۲$ را بر اساس تجزیه‌ی GSVD که در بالا ارائه شد، برآورد کرد. مقدار تابع هزینه مرتبط با هَموار بودن مدل، $Cost_{smooth}$، برابر است با:

$$Cost_{smooth} = \left\|\mathbf{L}\mathbf{W}_{reg,\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}\right\|^۲ = \left\|\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}^{-T}\mathbf{x})\right\|^۲ = \left\|\mathbf{V}\mathbf{M}\mathbf{x}\right\|^۲ = \left\|\mathbf{M}\mathbf{x}\right\|^۲ \quad (۵\text{-}۷)$$

که در مرحله‌ی آخر آن از این حقیقت که $\mathbf{V}$ یک ماتریس اورتونرمال است استفاده می‌کند. بر اساس رابطه‌ی (۵-۷) می‌توان $Cost_{smooth}$ را به صورت تابعی از λ_i و μ_i، یا به طور معادل γ_i نوشت.

$$(Mx)_i = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2}\frac{\mu_i}{\lambda_i}\mathbf{U}_{:,\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}_{\omega_j} = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2}\frac{\mathbf{U}_{:,\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i} \tag{۵-۸}$$

به طور مشابه، $Cost_{data}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} Cost_{data} = \left\|\mathbf{d}_{\omega_j} - \mathbf{G}\mathbf{W}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}\right\|^2 = \left\|\mathbf{d}_{\omega_j} - \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}^{-\mathbf{T}}\mathbf{x}\right\|^2 = \\ \left\|\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{d}_{\omega_j} - \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}\right\|^2 = \left\|\mathbf{U}(\mathbf{U}^T\mathbf{d}_{\omega_j} - \mathbf{\Lambda}\mathbf{x})\right\|^2 \end{aligned} \tag{۵-۹}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{U}$ ماتریس اورتونرمال است، $Cost_{data}$ برابر با:

$$\left\|\mathbf{d}_{\omega_j} - \mathbf{G}\mathbf{W}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}\right\|^2 = \left\|(1 - \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2})\mathbf{U}_{:,i}^T\mathbf{d}_{\omega_j}\right\|^2 \tag{۵-۱۰}$$

ضرایب $f_i = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2}$ ضرایب فیلتر خوانده می‌شوند و میزان مشارکت مقادیر $\mathbf{U}_{:,i}^T\mathbf{d}_{\omega_j}$ و $\frac{\mathbf{U}_{:,\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ را به صورت توابعی از λ_i و μ_i، به ترتیب در $Cost_{data}$ و $Cost_{smooth}$ تعیین می‌کنند[هنسن، ۲۰۰۵]. به عبارت دیگر ضرایب فیلتر کنترل کننده‌ی نحوه‌ی تبدیل شدن داده‌ها به مقدار خطا به صورت تابعی از مقادیر تکین هستند. چنانکه در بخش (۲-۴-۱) اشاره شد، مقادیر ویژه‌ی کوچک، بخشی از پارامترهای مدل را نمایندگی می‌کنند که مشارکت کمی در تقریب داده‌ها دارند، بنابراین نمی‌توان آن بخش از داده‌ها را به صورت بدون ابهام و فقط با یافتن کمینه‌ی تابع هزینه‌ی خطا به دست آورد. بدین ترتیب، مقادیر ویژه‌ی کوچک، حل معکوس را ناپایدار می‌کنند و می‌بایست فیلتر شوند. پارامتر α مقدار قطع[۴] در ضرایب فیلتر را نشان می‌دهد. این پارامتر مقادیر ویژه‌ای را که در حل معکوس قابل استفاده هستند را از مقادیر ویژه‌ای که به دلیل ناپایداری از حل خارج می‌شوند، جُدا می‌کند. در روش (GSVD)، مقادیر تکین عمومی γ_i به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند، بنابراین f_i نشاندهنده‌ی یک فیلتر بالاگذر است (شکل ۵-۱الف، ه). به ازای مدل هَموارتر (رابطه‌ی ۵-۸)، مقادیر ویژه‌ی تعمیم یافته‌ی کوچک (γ_i) و طبعاً ضرایب فیلتر کوچکتر (f_i)، مرتبط با باند توقف، مقادیر بزرگ $\frac{\mathbf{U}_{:,\mathbf{i}}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ را میرا می‌کنند. بالعکس، برای

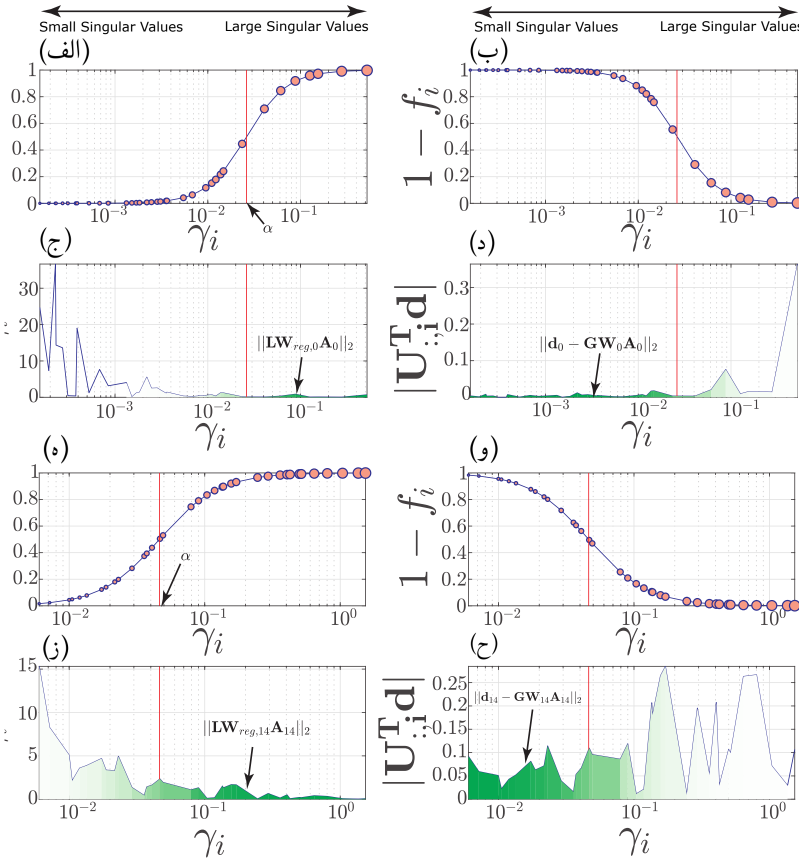
[4] Cut-off

به دست آوردن خطای داده‌های کمتر در رابطه‌ی (۵-۱۰)، $(1 - f_i)$ یک فیلتر پائین‌گذر می‌باشد (شکل ۵-۱ب، و)، که مقادیر بزرگ $\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}$ را میرا می‌کند.

شکل ۵-۱ مقادیر f_i، $1 - f_i$، $\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}$ و $\frac{\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ را به‌صورت توابعی از مقادیر ویژه‌ی تعمیم یافته γ_i در دو فرکانس حل 0 Hz و $0/44$ Hz $\approx \frac{14}{32}$، برای نمونه نشان می‌دهند. در فرکانس 0 Hz، وضعیت $\frac{\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ (شکل ۵-۱ج) و $\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}$ (شکل ۵-۱د) به گونه‌ای است که به راحتی می‌توانیم مقدار پارامتر قطع ضرایب فیلتر α را در محدوده‌ی مقادیر تکین γ_i بیابیم، به نحوی که مقادیر بزرگ $\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}$ (مقادیر تکینی که داده‌ها تصویر بزرگی بر روی آن‌ها دارند) از مقادیر بزرگ $\frac{\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ (مقادیر تکین ناپایدار کننده) تفکیک شوند. از این رو می‌توان به نحوی مؤثر مقادیر تکین کوچک و نامطلوب را از مقادیر تکین بزرگ جدا کرده و مقادیر تکین نامطلوب را فیلتر کرد. این تفکیک آشکار بین مقادیر تکین بزرگ و کوچک، خود را در منحنی L-curve و تیزگوشه بودن آن نشان می‌دهد و می‌توان دریافت که توازن میان برازش به داده‌ها و هَموار بودن مُدل به خوبی برقرار شده است. توجه کنید که آن بخش از تابع هزینه‌ی کلی (رابطه‌ی ۴-۱۷) که به هَموار بودن مدل مربوط است (شکل ۵-۱ج) و بخش دیگر آن که به انطباق با داده‌ها مربوط است (شکل ۵-۱د)، به صورت سطح سایه خورده نمایش داده شده است. در هر دو حالت، تیرگیِ سایه به وسیله‌ی ضرایب فیلتر، به ترتیب f_i و $1 - f_i$ تنظیم شده است. از سوی دیگر در مؤلفه‌ی فرکانس بالاتر ($0/44$Hz $\approx \frac{14}{32}$)، مقادیر تکین بزرگ و کوچک به خوبیِ فرکانس 0 Hz از یکدیگر تفکیک نشده‌اند. در نتیجه تصمیم‌گیری در مورد مقدار مناسب قطع ضرایب فیلتر α در فرکانس‌های بالاتر دشوارتر است. یادآوری می‌شود که در گام‌های متوالی آموزش دوگانه و رفت و برگشت میان گام خطی و گام بیشترین شیب، و یافتن کمینه‌ی $Cost_{data}$ (سطح هاشور خورده رد شکل‌های ۵-۱د، ح) و $Cost_{smooth}$ (سطح هاشور خورده‌ی سبز رنگ ۵-۱ج، ز) مقدار α را ثابت نگه می‌داریم.

۵-۳ تأثیر تغییر تعداد توابع عضویت فازی

در مثال حل شده در فصل ۴ برای مسئله‌ی SIV-inv1، به طور دلبخواه از ۶ تابع عضویت در هر دو راستای امتداد و شیب استفاده کردیم. در بخش قبل هم نشان دادیم که با استفاده از تکنیک GSVD می‌توانیم مقادیر تکین تعمیم یافته‌ی مقید کننده را از مقادیر تکین بَد وضع کننده تفکیک کنیم. تعداد پارامترهای مورد استفاده در حل معکوس پیشنهادی ما با تعداد توابع عضویت، تعیین می‌شوند. اگر از تعداد توابع عضویت کمتری استفاده کنیم، مسئله معکوس دارای پارامترهای کمتری خواهد بود. در این حالت یافتن مقدار این پارامترها آسان‌تر خواهد بود. با این



شکل ۵-۱: تجزیه‌ی مقادیر تکین تعمیم یافته برای حل معکوس با استفاده از معادله‌ی نُرمال منظم شده (رابطه‌ی ۴-۱۶)، (الف-د) مؤلفه‌ی 0 Hz، (ه-ح) مؤلفه‌ی ۰٫۴۴ Hz $\approx \frac{14}{32}$. (الف، ه) ضرایب فیلتر، $f_i = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2+\alpha^2}$، که به یک فیلتر بالاگذر مربوط هستند و مشارکت مقادیر ویژه‌ی کوچک را در حل معکوس کنترل می‌کنند. مقدار پارامتر قطع ضرایب فیلتر α از طریق بیشینه‌ی انحنا در منحنی‌های L-curve به دست آمده است و با خط قائم قرمز رنگ مشخص می‌گردد. اندازه‌ی دوایر با توجه به بزرگ و کوچک بودن مقادیر تکین، تعیین شده است. (ب، و) $(1-f_i)$، فیلتری پایین‌گذر که اثر ناپایدار کننده‌ی مقادیر بزرگ $\frac{\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}}{\gamma_i}$ را فرومی‌نشاند. (ج، ز) مقادیر $\frac{\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}}{\gamma_i}$ (بنگرید به رابطه‌ی ۵-۸) به صورت تابعی از مقادیر تکین تعمیم یافته (γ_i). دقت کنید که مقادیر بزرگ $\frac{\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}}{\gamma_i}$ همه در باند توقف f_i قرار گرفته‌اند، بنابراین به نحوی موثر از حل معکوس خارج شده‌اند. توجه کنید که $Cost_{smooth}$ به ناحیه‌ی سایه خورده‌ی زیر سطح این نمودار مرتبط است. (د، ح) مقادیر $\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}$ به صورت تابعی از مقادیر تکین تعمیم یافته (γ_i). مقادیر بزرگ $\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}$ به مقادیر تکینی که با داده‌ها دارای تطابق بهتری هستند و دارای تصویر بزرگتری بر روی $\mathbf{U}_{:,i}$ می‌باشند، مربوط می‌شود. دقت کنید که در فرکانس بالاتر، (در اینجا $f = \frac{14}{32} \approx 0.44$ Hz) بردار داده‌ها دارای تصویر بزگتری بر روی $\mathbf{U}_{:,i}$ که با مقادیر تکین کوچک مرتبط هستند، می‌باشد. $Cost_{data}$ برابر با جمع مربعات $\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}$ است که با ضرایب $(1-f_i)$ فیلتر شده‌اند و با ناحیه‌ی هاشور خورده‌ی زیر نمودارهای (د، ح) مرتبط می‌باشند. نمودارهای فوق همگی برای اولین گام آموزشی از روش آموزش دوگانه به دست آمده‌اند. تعداد توابع پایه‌ی فازی مورد استفاده برابر با $N_\xi = 6$ و $N_\eta = 6$ می‌باشد و در مجموع ۳۶ مقدار تکین غیر صفر در این مسئله داریم.

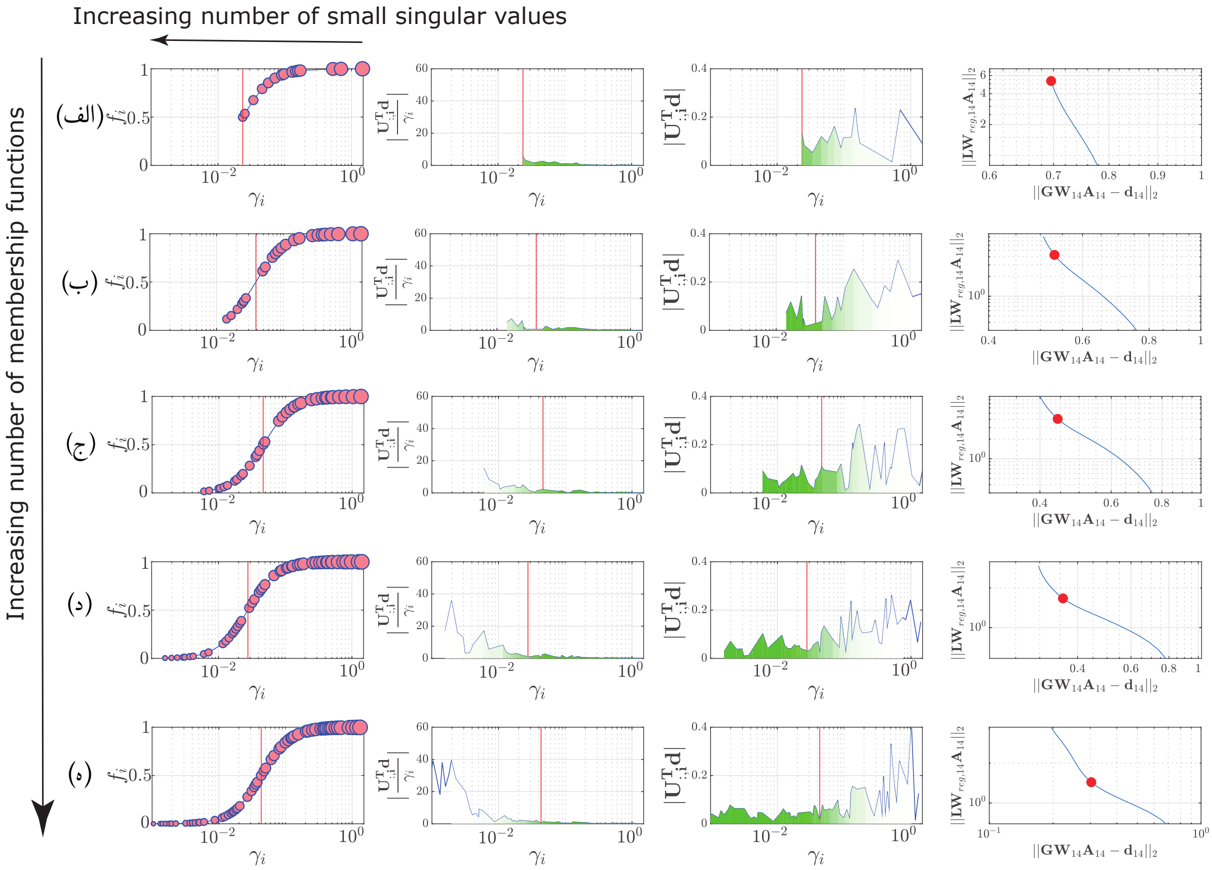
حال، با تعداد پارامترهای کمتر قادر نیستیم جزئیات و ظرافت‌های یک لغزش پیچیده را به دست بیاوریم. در سوی دیگر، اگر از تعداد پارامترهای بیشتری استفاده کنیم، اگر چه قابلیت آن برای توصیف جزئیات مدلسازی بیشتر می‌شود، اما مسئله دارای پارامترهای مدل بیشتری خواهد شد و تعیین مقدار این پارامترها دشوارتر است.

برای بررسی دقیق‌تر وضعیت حل معکوس، هنگامی که تعداد توابع عضویت افزایش می‌یابد یکی از مؤلفه‌های فرکانس-بالا که جواب آن دارای جزئیات دقیقی در حل معکوس ما نیست را در نظر می‌گیریم. در این بخش، لغزش در فرکانس $f = \frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴\,\mathrm{Hz}$ را برای این منظور بررسی می‌کنیم. در شکل (۵-۲)، پارامترهای GSVD یعنی ضرایب فیلتر ($f_i = \frac{\gamma_i^۲}{\gamma_i^۲+\alpha^۲}$)، $\frac{\mathbf{U}_{:,i}^{\mathbf{T}}\mathbf{d}}{\gamma_i}$ و $\mathbf{U}_{:,i}^{T}\mathbf{d}$ را در فرکانس $f = \frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴\,\mathrm{Hz}$ نشان می‌دهد، برای حل معکوس از تعداد متفاوتی تابع عضویت استفاده کرده‌ایم: $N_\xi = ۴N_\eta = ۴$ (شکل ۵-۲الف)، $N_\xi = ۵N_\eta = ۵$ (شکل ۵-۲ب)، $N_\xi = ۶N_\eta = ۶$ (شکل ۵-۲ج)، $N_\xi = ۷N_\eta = ۷$ (شکل ۵-۲د) و $N_\xi = ۸N_\eta = ۸$ (شکل ۵-۲ه). این شکل نشان می‌دهد که با افزایش توابع پایه، تعداد مقادیر تکین کوچک افزایش می‌یابد، بنابراین مسئله‌ی معکوس بَدوضع‌تر شده و به نوفه حساس‌تر می‌شود. در حالت کلی، در حل معکوسی که از تعداد توابع عضویت کمتری استفاده شده است، به میزان کمتری به نوفه حساسیت نشان می‌دهد و می‌تواند فقط ویژگی‌های اصلی مدل را به دست آورد.

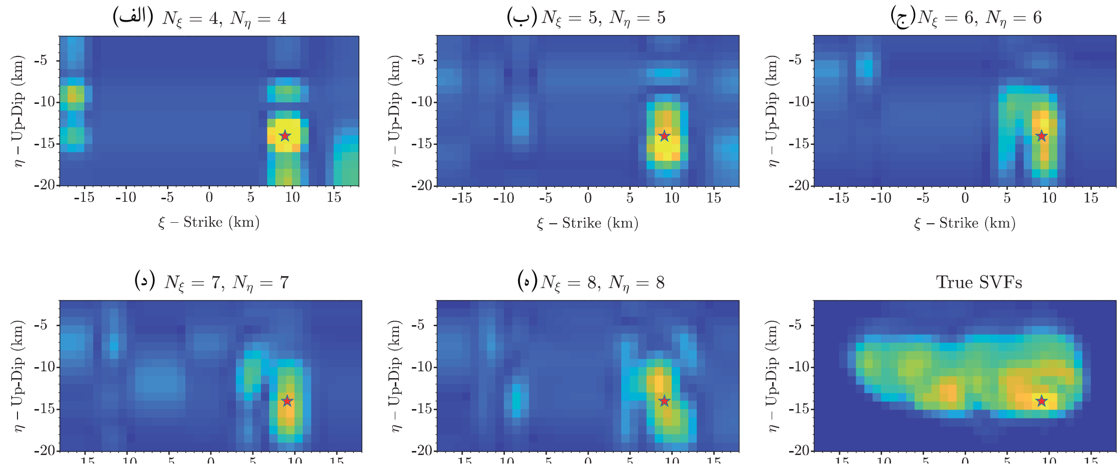
چون مسئله‌ی ما بدوضع است، به ناچار باید از یک روش منظّم‌سازی استفاده کنیم و بایستی همواره پارامتر α را در حل خودمان داشته باشیم. توجه کنید که در این مسئله، با توجه به اینکه مدلسازی ما دقیق است یعنی مدل سرعتی دقیق را داریم و هندسه‌ی گسل از پیش معلوم است، مقدار α در حالت‌های مختلف نشان داده شده در شکل (۵-۲) ثابت است. این نشان می‌دهد که معیار بیشترین انحنای منحنی L-curve می‌تواند به نحوی قابل اطمینان برای یافتن مقدار α به کار رود. در این حالت چون تخمین ما از α قابل اطمینان است و نسبت به افزایش تعداد توابع عضویت حساس نیست، می‌توانیم تعداد توابع عضویت را به تعداد دلخواه افزایش دهیم. با این حال با افزایش توابع عضویت و در نتیجه افزایش تعداد مقادیر تکین کوچک، ممکن است یافتن α ساده نباشد(زمانی که از مدل‌سازی نادقیق و داده‌های همراه با نوفه‌ی زیاد در حل استفاده می‌کنیم)، در این حالت بهتر است از تعداد کمی توابع عضویت استفاده شود.

توجه کنید که به دلیل استفاده از تکنیک منظّم‌سازی، حتی اگر تعداد توابع عضویت را به تعداد بسیار زیادی افزایش دهیم، چون بخشی از مدلسازی مستقیم را فیلتر کرده‌ایم، باز هم قادر به بازتولید جواب درست نخواهیم بود.

شکل (۵-۳) مقادیر نهایی لغزش در فرکانس $f = \frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴\,\mathrm{Hz}$، برای حالت‌های اشاره شده در بالا با تعداد توابع عضویت مختلف را نمایش می‌دهد. لغزش‌های به دست آمده دارای شباهت‌هایی کلی با لغزش درست



شکل ۵-۲: تحلیل مسئله‌ی معکوس با استفاده از تکنیک GSVD در ۵ حالت مختلف و با استفاده از تعداد توابع پایه‌ی متفاوت. تمامی حل‌ها برای لغزش در فرکانس $f = \frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴$ Hz، در گام اول آموزش و با داده‌های بدون نوفه‌ی مثال معیار SIV-inv1 انجام شده است. (الف) $N_\eta = ۴$ $N_\xi = ۴$، (ب) $N_\eta = ۵$ $N_\xi = ۵$، (ج) $N_\eta = ۶$ $N_\xi = ۶$، (د) $N_\eta = ۷$ $N_\xi = ۷$، (ه) $N_\eta = ۸$ $N_\xi = ۸$. افزایش تعداد توابع پایه به افزایش تعداد مقادیر تکین کوچک منجر شده است. پارامتر منظم‌ساز α (خط قرمز رنگ قائم)، برای هر ۵ حالت تقریباً مقدار یکسانی دارد و ضرایب فیلتر در ۵ حالت، دارای مقادیر یکسانی در محدوده‌ی مقادیر تکین مسئله هستند. دقت کنید که حل معکوسی که از تعداد توابع پایه‌ی بیشتری در آن استفاده شده است، قابلیت بیشتری جهت نشان دادنِ تغییرات محلی لغزش دارد (شکل ۵-۳).



شکل ۵-۳: نمایش تغییرات مکانی لغزش در فرکانس $f = \frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰٫۴۴$ Hz پس از ۵۰۰ دوره‌ی آموزش، با استفاده از داده‌های بدون نوفه. مقایسه میان (الف) لغزش به دست آمده با استفاده از ۱۶ تابع عضویت: $N_\xi = ۴, N_\eta = ۴$، (ب) با استفاده از ۲۵ تابع عضویت: $N_\xi = ۵, N_\eta = ۵$، (ج) با استفاده از ۳۶ تابع عضویت: $N_\xi = ۶, N_\eta = ۶$، (د) با استفاده از ۴۹ تابع عضویت: $N_\xi = ۷, N_\eta = ۷$، (ه) با استفاده از ۶۴ تابع عضویت: $N_\xi = ۸, N_\eta = ۸$ و (و) تابع لغزش درست. حل معکوس با استفاده از توابع پایه‌ی بیشتر، قابلیت بیشتری در ارائه‌ی جزئیات لغزش دارد.

هستند. نتیجه‌ی حل معکوس با استفاده از بیشترین تعداد توابع عضویت $(N_\xi = ۸, N_\eta = ۸)$، می‌تواند جزئیات بیشتری را نشان بدهد. در حالت کلی، در فرکانس‌های پائین به تعداد کمتری تابع عضویت برای توصیف لغزش نیاز است، حال آنکه لغزش در فرکانس‌های زیاد، به توابع عضویت بیشتری برای توصیف جزئیات نیاز دارد.

۵-۴ تاثیر منظّم‌سازی بر نتایج حل معکوس

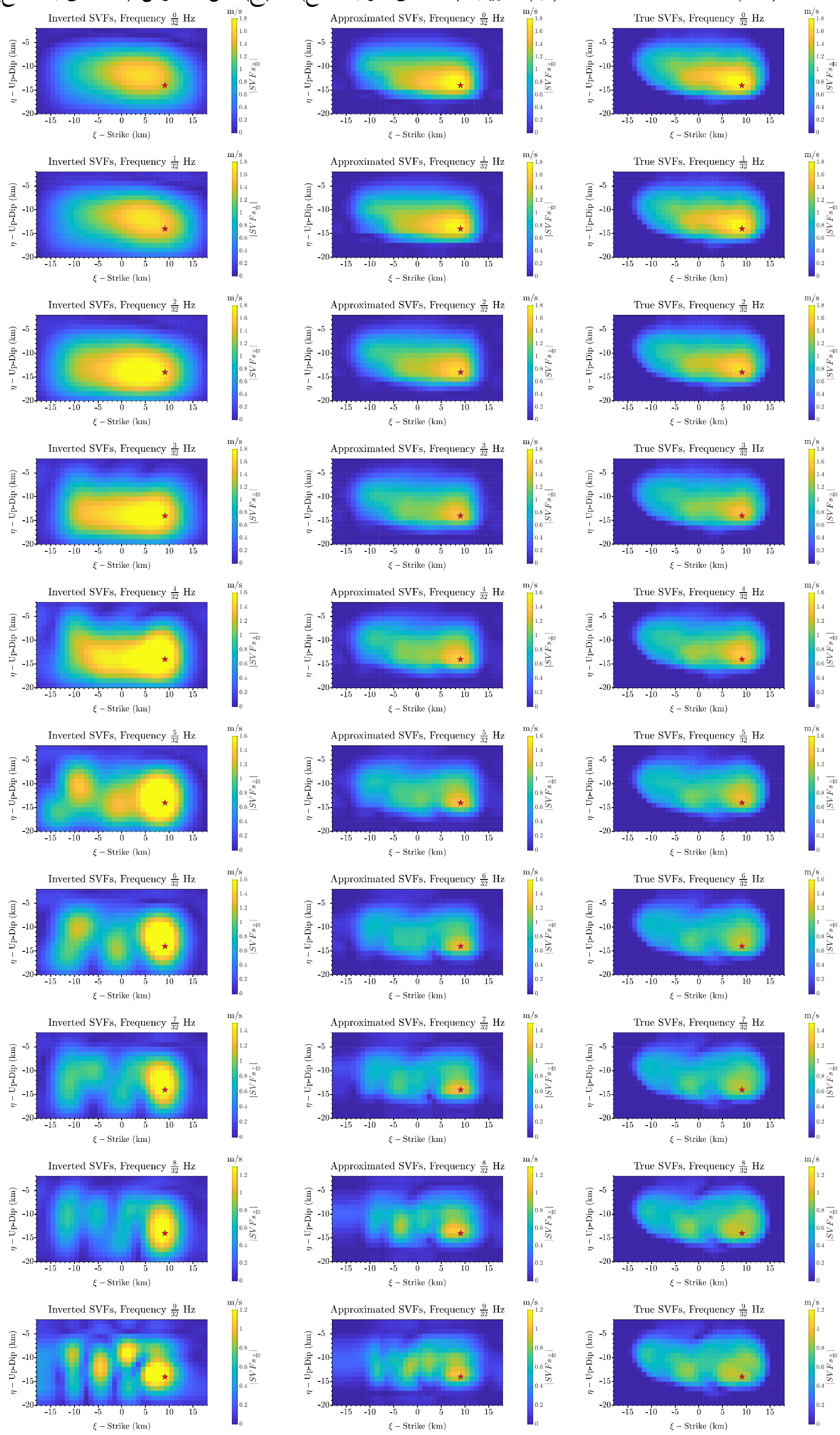
در اینجا سوال مهمی که پیش می‌آید این است که اثر منظّم‌سازی بر نتایج حل معکوس و تابع لغزش به دست آمده چیست؟ برای پاسخ‌دهی به این سوال، دو مسئله‌ی تخمین پارامتر ۵-۱۱ و ۵-۱۲ را در نظر بگیرید:

$$\Delta \bar{u}(\xi, \eta, \omega_j) = \sum_{i\xi=1}^{N_\xi} \sum_{i\eta=1}^{N_\eta} \bar{W}_{i\xi,i\eta}(\xi, \eta) A_{i\xi,i\eta,\omega_j} \tag{۵-۱۱}$$

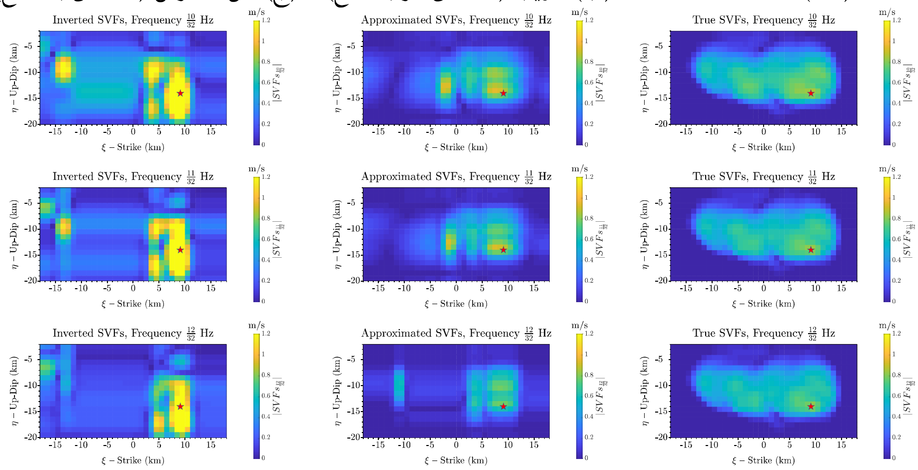
$$u_n(\mathbf{x}, \omega_j) = \sum_{i_\xi=1}^{N_\xi} \sum_{i_\eta=1}^{N_\eta} \int_\Gamma \bar{W}_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}(\xi, \eta) G'_n(\mathbf{x}; \xi, \eta, \omega_j) A_{i_\xi,i_\eta,\omega_j} \mathrm{d}\Gamma \tag{۵-۱۲}$$

در هر دو حالت، هدف ما یافتن $A_{i_\xi,i_\eta,\omega_j}$ و پارامترهای $\bar{W}_{i\xi,i\eta}(\xi,\eta)$ است. در حالت اول (رابطه‌ی ۵-۱۱)، تابع نرخ لغزش درست، $\Delta\bar{u}^{true}(\xi,\eta,\omega_j)$، را در اختیار داریم و در حالت دوم (رابطه‌ی ۵-۱۲)، داده‌های درست و بدون نوفه، $d_n^{true}(\mathbf{x},\omega_j)$ ناشی از لغزش درست را در اختیار داریم. مسئله‌ی اول، یک مسئله‌ی تخمین پارامتر خوب‌وضع، و مسئله‌ی دوم یک مسئله‌ی تخمین پارامتر بدوضع را نشان می‌دهند. می‌خواهیم تابع مدل به دست آمده از دو مسئله را با یکدیگر مقایسه کنیم. برای این منظور، $N_\xi = ۶, N_\eta = ۶$ را در نظر می‌گیریم. در فصل ۴ مسئله‌ی مستقیم بدوضع را با استفاده از روش ارائه شده در بخش ۴-۳ منظّم کردیم. در حالت تقریب خوب‌وضع، لغزش به دست آمده قابلیت همگرایی به جواب درست را دارد، برای این منظور کافیست تعداد توابع پایه را افزایش دهیم. همانطور که در شکل ۵-۴(ب) مشاهده می‌شود، تقریب در فرکانس‌های پایین به شکلی نسبتاً دقیق، لغزش درست را بازتولید کرده است. در فرکانس‌های بالا نیاز مندد به استفاده از توابع پایه‌ی بیشتری برای تقریب همه‌ی جزئیات لغزش هستیم. در سوی مقابل، در جواب‌های حل معکوس در شکل ۵-۴(ج)، منظّم‌سازی مانع از دستیابی به جوابی معادل با تقریب خوب وضع شده است و نتیجه‌ی حل معکوس، قادر به بازتولبد تمامی جزئیات جواب نبوده است. با این وجود، جواب به دست آمده توانسته است مشخصات کلی لغزش را نتیجه دهد. در حل خوب‌وضع، با افزایش تعداد توابع پایه، قادر به بازسازی جزئیات هستیم، امّا در حل بدوضع، برای به دست آوردن جزئیات بیشتر، بایستی مشاهدات مستقل بیشتری داشته باشیم، به نحوی که با افزایش تعداد توابع پایه و به وجود آمدن مقادیر تکین کوچک، حل معکوس ناپایدار نشود.

(الف) مدل درست　　(ب) تقریب (مسئله‌ی خوب وضع)　　(ج) حل معکوس (مسئله‌ی بد وضع)



(الف) مدل درست — (ب) تقریب (مسئله‌ی خوب وضع) — (ج) حل معکوس (مسئله‌ی بد وضع)

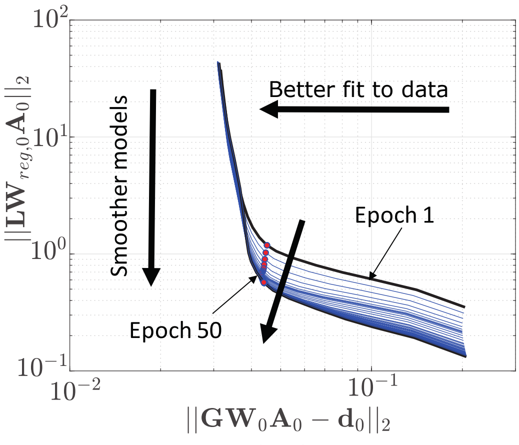


شکل ۵-۴: اثر منظّم‌سازی و استفاده از تعداد کم توابع پایه جهت تقریب تابع نرخ لغزش در حل معکوس. مقایسه میان (الف) جواب درست تمرین معیار SIV-inv1، (ب) تقریب خوب-وضع با استفاده از روش تقریب تابعی فازی، ارائه شده در فصل ۳ و تقریب پارامترها بر اساس رابطه‌ی ۵-۱۱، (ج) حل معکوس، یک مسئله‌ی بدوضع تقریب پارامترها بر اساس رابطه‌ی ۵-۱۲ که با استفاده از روش ارائه شده در بخش ۴-۳ منظّم شده است. در حل دو حالت (ب) و (ج) از تعداد $N_\xi = ۶, N_\eta = ۶$ تابع پایه استفاده شده است.

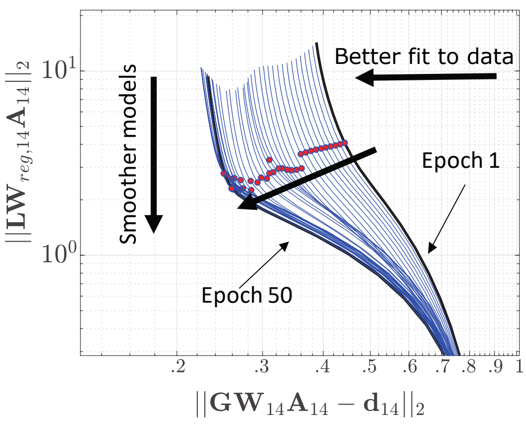
۵-۵ تغییرات L-curve در طول آموزش

فرآیند آموزش در روش حل معکوس فازی را می‌توان به صورت فرآیندی تکاملی[5] در نظر گرفت که بخشی از توابع پایه که داده‌ها بر روی آن تصویر بزرگی ندارند و حل معکوس را ناپایدار می‌کنند را فیلتر کرده، و از آموزش خارج می‌کند، و بخش دیگری از توابع پایه را که تطابق مناسبی با داده‌ها دارند نگه‌می‌دارد و طی گام‌های متوالی آنها را بهبود می‌بخشد. این فرآیند تا رسیدن به نقطه‌ی سکون ادامه می‌یابد، یعنی جایی که دیگر تطابق بهتر با داده‌ها، بدون ناپایداریِ حل امکان پذیر نیست. همچنان که انتظار داریم، بخشی از قدرت آموزش و توانایی روش پیشنهادی برای یافتن پارامترهای مدل به دقت توابع گرین بستگی دارد. هنگامی که توابع گرین به خوبی تقریب زده نشده باشند، و یا اطلاعات از مدلسازی آنها اندک باشد، روش حل معکوس فازی نمی‌تواند مدل لغزش را به خوبی به دست بیاورد. در ادامه توانایی بهبود جواب و تطبیق با داده‌ها را در روش حل معکوس فازی را با دقت بر روی تکامل L-curve ها بررسی خواهیم کرد، که در آن تطابق با داده‌ها، در فضای داده، و کاهش اندازه‌ی هَمواریِ مدل، در فضای مدل، می‌تواند در طی گام‌های حل بهبود بیابد.

[5] Evolutionary



(الف)



(ب)

شکل ۵-۵: تغییرات منحنی L-curve طی ۵۰ دوره‌ی آموزش در (الف) ۰ Hz، (ب) $\frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴$ Hz. در طی گام‌های آموزش، منحنی L-curve به سمت پایین و چپ نمودار حرکت کرده است، که نشان می‌دهد به جواب‌های هَموارتر و به تطابق بهتری رسیده‌ایم.

شکل ۵-۵الف تغییرات منحنی L-curve را برای فرکانس ۰ Hz در دوره‌های متوالی آموزشی از گام ۰ تا گام ۵۰ نشان می‌دهد. در این شکل، در گام‌های متوالی آموزش، بهبود پیوسته نتیجه مشهود است. در طی این گام‌های آموزشی، اگرچه نُرم باقیمانده، $||\mathbf{GW}_۰\mathbf{A}_۰ - \mathbf{d}_۰||_۲$ تغییرات زیادی نکرده است، مقدار هَموار بودن لغزش، $||\mathbf{LW}_{reg,۰}\mathbf{A}_۰||_۲$ در تمامی گام‌ها بهبود پیدا کرده است. از طرف دیگر، در مولفه‌ی فرکانس بالا ($f = ۱۴/۳۲ \approx ۰/۴۴$)، هر دو مقدار نُرم باقیمانده و هَمواری لغزش در طی گام‌های آموزش بهبود پیدا کرده‌اند (شکل ۵-۵ب). در این حالت، کاهش مقدار نُرم باقیمانده ($||\mathbf{GW}_{۱۴}\mathbf{A}_{۱۴} - \mathbf{d}_{۱۴}||_۲$) از کاهش هَمواری ($||\mathbf{LW}_{reg,۱۴}\mathbf{A}_{۱۴}||_۲$) بیشتر بوده است. دقت کنید که در این نماد عدد ۱۴ نشان‌دهنده‌ی فرکانس حل است: $\frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴$ Hz.

نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که با همگرا شدن جواب طی فرآیند آموزش، منحنی‌های L-curve تیزگوشه‌تر می‌شوند، این امر نشان می‌دهد که با پیشرفت فرآیند آموزش، تمایز میان توابع پایه‌ای که فیلتر می‌شوند، و دسته‌ی دیگری که در مسئله نگه داشته می‌شوند بیشتر می‌شود. به عبارت دیگر، تنها آن دسته از توابع پایه‌ای که فیلتر

نشده‌اند، آموزش می‌بینند. همچنین دقت کنید که مدل لغزش در فرکانس‌های مختلف به شیوه‌ای متفاوت تغییر می‌کنند. در مثال فوق، در فرکانس‌های پایین اندازه‌ی هَمواری مدل بیشتر تغییر می‌کند، در حالیکه در فرکانس‌های بالا نُرم باقیمانده‌ی داده‌ها بیشتر تغییر می‌کند.

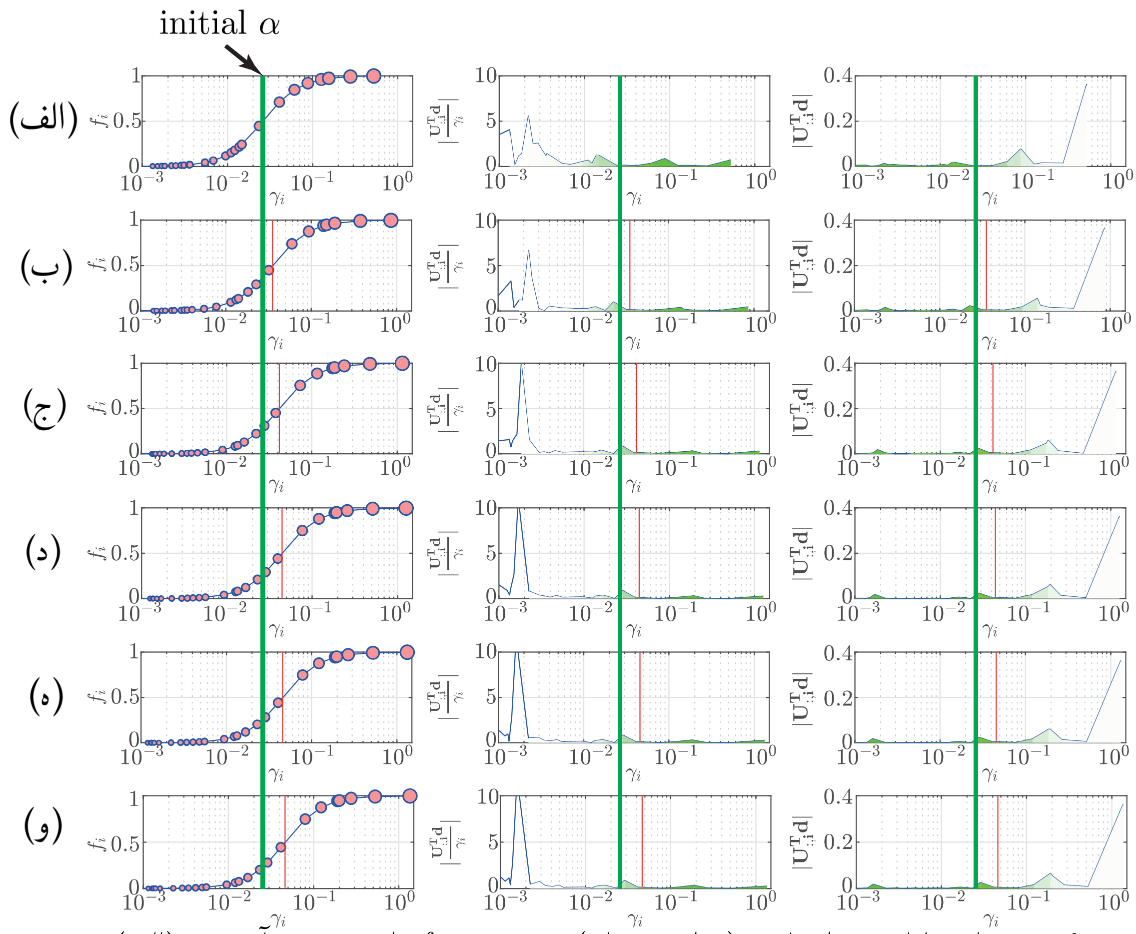
۵-۶ تغییرات پارامتر بیشترین انحنا (α) طی گام‌های آموزش

در بخش ۵-۲ دیدیم که پارامتر منظم‌ساز (α) توازن میان نُرم باقیمانده و هَموار بودن مدل را تعریف می‌کند. در حالت کلی به میزان نوفه در داده‌ها و دقت مدلسازی ما دارد. در شکل (۵-۲) نشان دادیم که تعداد توابع پایه‌ی فازی، مقدار پارامتر منظم‌ساز (α) را تغییر چندانی نمی‌دهد. در این بخش می‌خواهیم تغییرات (α) را در طی دوره‌های آموزش مورد بررسی قرار دهیم.

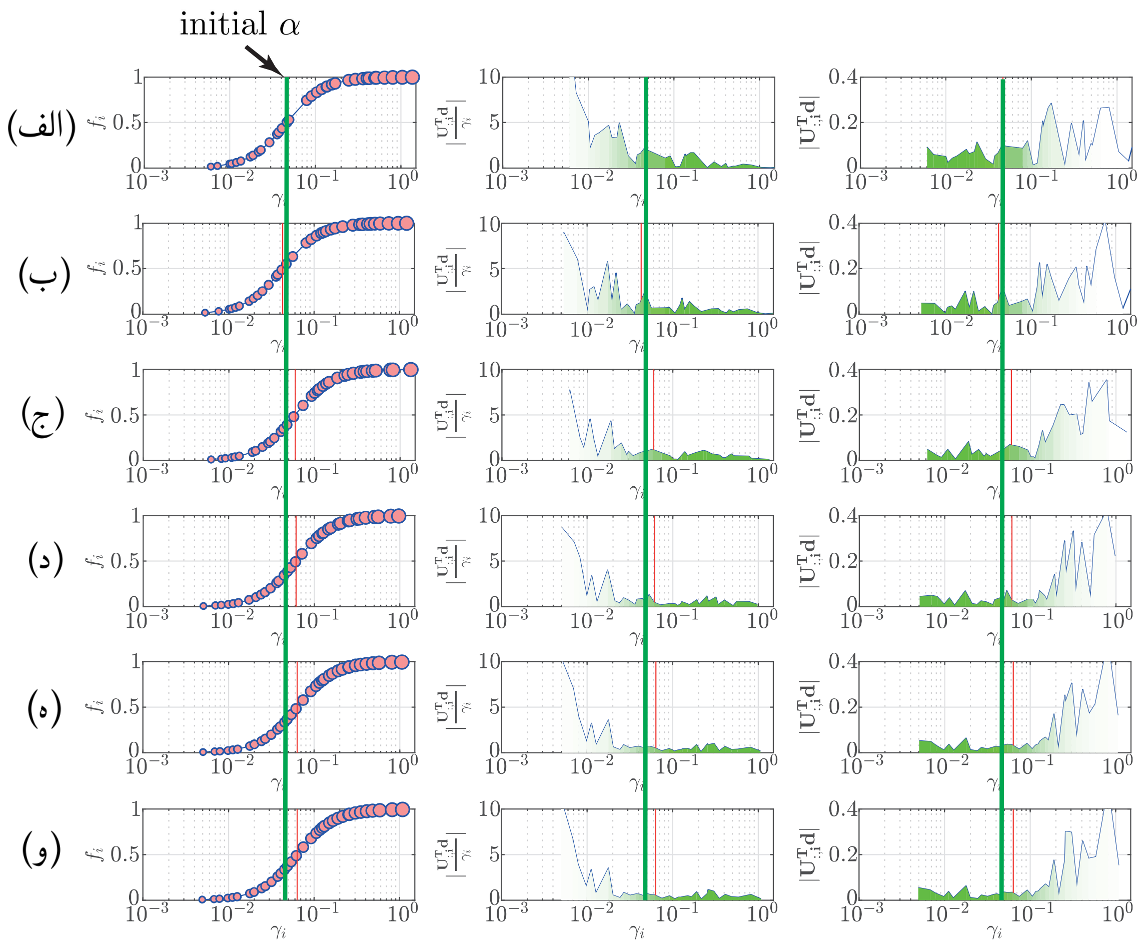
در روش منظّم‌سازی ما، α را به منظور انتخاب بخشی از مدلسازی ریاضی که تطابق بیشتری با داده‌ها دارند استفاده می‌کنیم و بخش دیگر را فیلتر می‌کنیم. این روش به شرطی معتبر است که محدوده‌ی مقادیر تکین در مسئله طی گام‌های مختلف آموزش، یکسان باقی بماند. اگر چنین نباید، می‌بایست مقدار α در گام‌های مختلف حل به روز رسانی شود. هم‌چنانکه در بخش (۴-۴-۳) اشاره شد، تغییر دادن مقدار α به معنی بهینه‌یابی با کمینه‌سازی توابع هزینه‌ی متفاوت است، که ممکن است حل معکوس را ناپایدار کند و به همگرایی حل منجر نشود. با این حال، با تغییرات تطبیقی توابع پایه، منحنی L-curve هم تغییر می‌کند و در نتیجه α هم تغییر می‌کند. برای این قسمت از بحث و بررسی، مقدار α را که از معیار بیشترین انحنا به دست می‌آید، در دوره‌های مختلف آموزش برای فرکانس‌های منتخب ۰ Hz، $\frac{۱۴}{۳۲} \approx ۰/۴۴$ Hz، و $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰/۷۲$ Hz رسم کرده‌ایم. این نتایج نشان می‌دهند که مقدار α، که از بیشترین انحنا به دست آمده است تغییر می‌کند، امّا این تغییرات شدید نیست و فرض αی ثابت فرضی معتبر است.

۵-۷ اثر مش‌بندی و دقت انتگرال‌گیری عددی بر یافتن مقدار پارامتر منظم‌ساز α

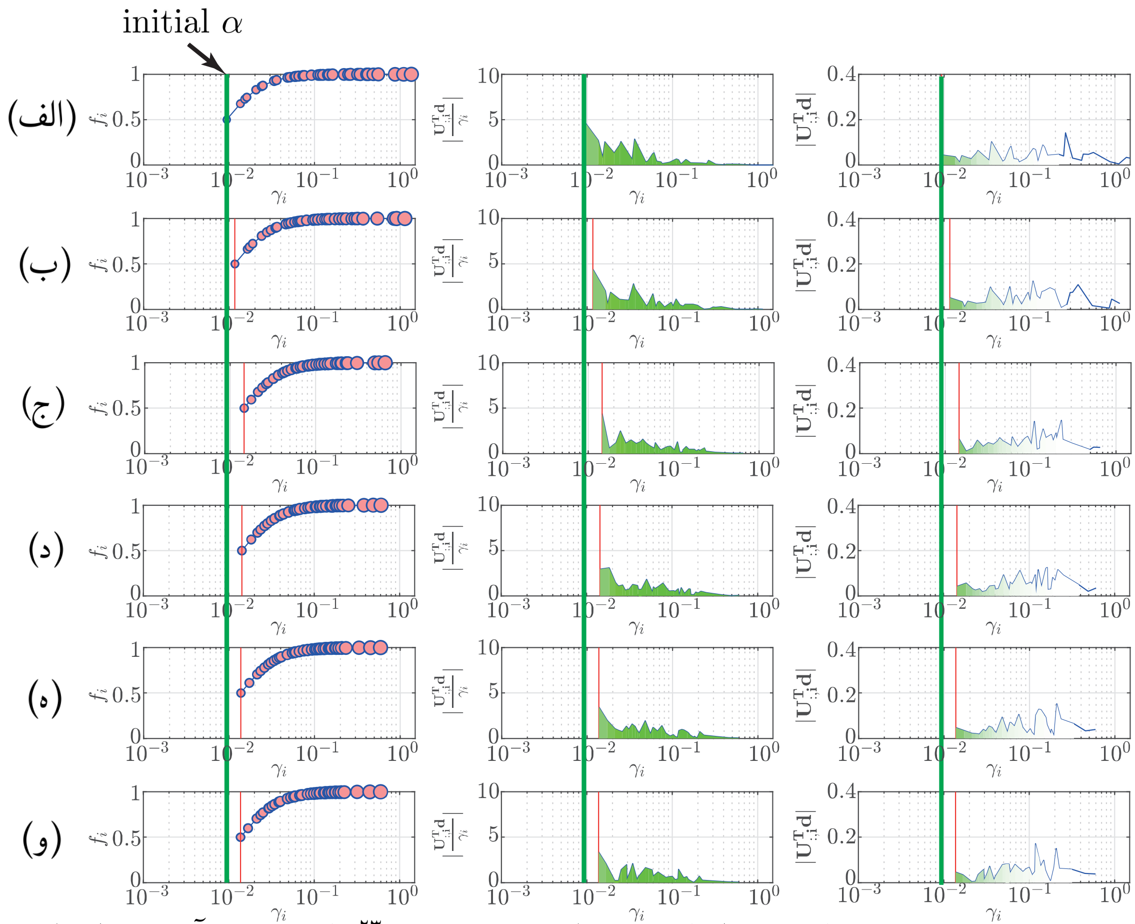
در بخش ۵-۳، نشان دادیم که با کاهش تعداد توابع عضویت می‌توان مسئله‌ی معکوس را با مقادیر تکین کوچک کمتری حل کرد و در نتیجه فضای تهی مدل را محدود نمود و مسئله‌ای که به میزان کمتری بد وَضع است را حل



شکل ۵-۶: تغییرات پارامتر منظم‌ساز α (خط قرمز قائم) در $f = ۰$ Hz طی ۵۰ دوره آموزش: (الف) دوره‌ی ۱، (ب) دوره‌ی ۱۰، (ج) دوره‌ی ۲۰، (د) دوره‌ی ۳۰، (و) دوره‌ی ۵۰. اگرچه مقدار α در فرآیند آموزش تغییر می‌کند، تغییرات آن زیاد نیست و می‌توان مقدار آن را در طی فرآیند آموزش ثابت فرض کرد.



شکل ۵-۷: تغییرات پارامتر منظم‌ساز α (خط قرمز قائم) در $0/44$ Hz $\approx \frac{14}{32}$ طی ۵۰ دوره آموزش: (الف) دوره‌ی ۱، (ب) دوره‌ی ۱۰، (ج) دوره‌ی ۲۰، (د) دوره‌ی ۳۰، (و) دوره‌ی ۵۰. اگرچه مقدار α در فرآیند آموزش تغییر می‌کند، تغییرات آن زیاد نیست و می‌توان مقدار آن را در طی فرآیند آموزش ثابت فرض کرد.



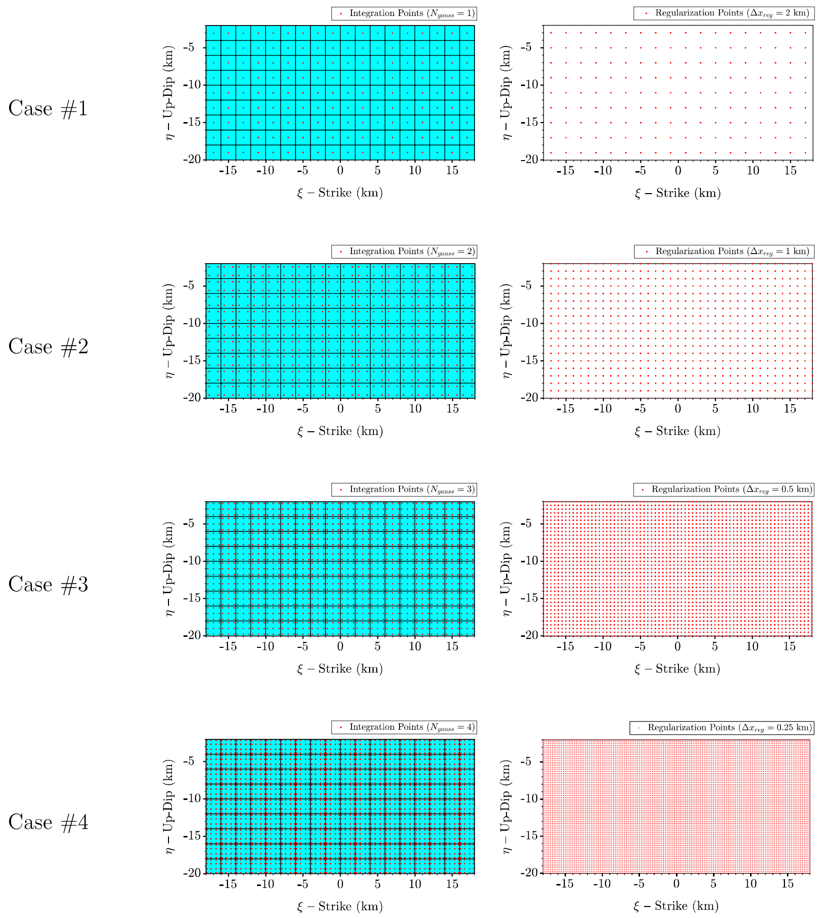
شکل ۵-۸: تغییرات پارامتر منظم‌ساز α (خط قرمز قائم) در $\frac{۲۳}{۳۲} \approx ۰٫۷۲$ Hz طی ۵۰ دوره آموزش: (الف) دوره‌ی ۱، (ب) دوره‌ی ۱۰، (ج) دوره‌ی ۲۰، (د) دوره‌ی ۳۰، (و) دوره‌ی ۵۰. اگرچه مقدار α در فرآیند آموزش تغییر می‌کند، تغییرات آن زیاد نیست و می‌توان مقدار آن را در طی فرآیند آموزش ثابت فرض کرد.

کرد. در روش پیشنهادی می‌توان با افزایش دقت مدل‌سازی مستقیم و اعمال قید منظّم‌سازی سختگیرانه‌تر، پارامتر α را با دقت بهتری به دست آورد و بد وضع بودن مسئله را به نحو مؤثرتری کاهش داد. در این راستا می‌توانیم به منظور افزایش دقت مدلسازی مستقیم، تعداد نقاط انتگرال‌گیری گاوس (N_{gauss}) را افزایش داده و برای اعمال قید منظّم‌سازی قوی‌تر، فاصله‌ی میان نقاط در شبکه‌ی منظّم‌سازی (Δx_{reg}) را کاهش دهیم. با کمک این راه حل، در مواردی که نقطه‌ی بیشینه‌ی انحنا قابل تشخیص نیست، مخصوصاً در فرکانس‌های بالا، می‌توانیم مقدار مناسبی برای مقدار پارامتر منظّم‌سازی بیابیم.

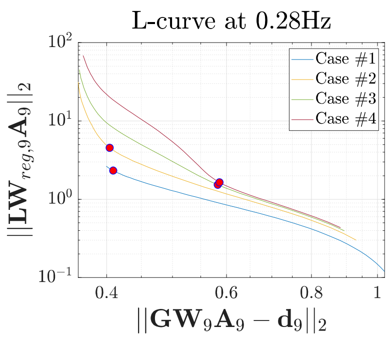
شکل ۵-۹ چهار حالت حل معکوس متمایز را نشان می‌دهد که در آن‌ها از تعداد متفاوتی نقاط انتگرال‌گیری گاوسی و نقاط منظّم‌سازی استفاده شده است. در این شکل از حالت ۱# تا حالت ۴# به طور پیوسته تعداد نقاط انتگرال‌گیری گاوسی (شکل ۵-۹الف) و تعداد نقاط منظّم‌سازی (شکل ۵-۹ب) را افزایش داده‌ایم. در تمامی حالات $N_\xi = ۶, N_\eta = ۶$، از تعداد توابع عضویت یکسانی استفاده شده است. منحنی L-curve مربوط به هر چهار حالت برای فرکانس $f = \frac{۹}{۳۲} \approx ۰/۲۸$ Hz در شکل (۵-۹ج) رسم گردیده است. در حالت ۱# نقطه‌ی دارای بیشترین انحنا به سختی قابل تشخیص است.با افزایش تعداد نقاط گاوسی و اعمال قید منظّم‌سازی قوی تر در حالت ۲#، نقطه‌ی دارای حدأکثر انحنا از سایر نقاط متمایز شده و یافتن مقدار α آسان‌تر می‌شود. در حالت ۳# و حالت ۴# نقاط دارای بیشترین انحنا دارای نُرم باقیمانده و هَمواری یکسانی هستند. در حالت ۴# منحنی L-curve دارای انحنای بیشتری است که یافتن پارامتر منظّم‌سازی (α) را آسانتر می‌کند. از میان چهار جواب ارائه شده، حالت‌های ۳# و ۴# برتر هستند چرا که جواب در نقطه‌ی بیشترین انحنا، کمتر از حالت‌های ۱# و ۲# به داده‌ها برازش شده است. هر چقدر که مقدار نُرم باقیمانده بیشتر باشد، نوفه‌ی کمتری در حل در نظر گرفته شده است که به معنی عدم بیش‌برازش است.

۵-۸ مطالعه‌ی ماتریس وضوح مدل

در این بخش به مطالعه‌ی ماتریس وضوح مدل پرداخته و اثر کاهش تعداد توابع پایه که برای بسط مکانی لغزش استفاده شده‌اند را بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ماتریس وضوح مدل را برای دو حالت مختلف گسسته‌سازی در فرکانس ۰ Hz مورد بررسی قرار می‌دهیم: ۱) حالتی که در آن تغییرات مکانی لغزش با زیرگسل‌هایی با لغزش ثابت گسسته شده‌اند [برای مثال اولسون و اپسل، ۱۹۸۲]، بنگرید به بخش ۲-۱۰-۱ و ۲) با $N_\xi = ۶, N_\eta = ۶$ تابع پایه‌ی فازی. در هر دو حالت از ۱۸ زیرگسل برای انتگرال‌گیری در راستای امتداد و ۹ زیرگسل برای انتگرال‌گیری



(الف) Integration Points		(ب) Regularization Points



(ج) L-curve

شکل ۵-۹: چهار حالت فرضی که برای در نظر گرفتن افزایش (الف) تعداد نقاط انتگرال‌گیری گاوسی و (ب) چگالی نقاط منظّم‌سازی در نظر گرفته شده است. حالت #۱: تعداد نقاط انتگرال‌گیری گاوسی درون هر زیر گسل ۱ عدد، و فاصله‌ی میان نقاط منظّم‌سازی ۲ km است. حالت #۲: $N_{gauss} = 2, \Delta x_r = 1$ km. حالت #۳: $N_{gauss} = 3, \Delta x_r = 0.5$ km. حالت #۴: $N_{gauss} = 4, \Delta x_r = 0.25$ km. (ج) منحنی L-curve در $f = \frac{9}{32} \approx 0.25$ Hz برای هر چهار حالت نشان داده شده‌ی فوق. در تمامی حالت از $N_\xi = 6, N_\eta = 6$ تابع عضویت استفاده شده است. دایره‌ی قرمز رنگ، نقطه‌ی با بیشترین انحنا بر روی L-curve را نمایش می‌دهد. افزایش دقت مدل‌سازی و اعمال قیود منظّم‌سازی قوی‌تر، منجر به یافتن پارامتر منظّم‌سازی مناسبتری می‌شود.

در راستای شیب استفاده شده است و مجموعاً در ۱۶۲ نقطه لغزش را به دست می‌آوریم. برای انتگرال‌گیری مستقیم، داخل هر زیرگسل انتگرال‌گیری، ۱ نقطه‌ی گاوسی در نظرگرفته‌ایم. عملگر منظّم‌سازی $\mathbf{L}$ در هر دو حالت یکسان است. پیکربندی نقاط انتگرال‌گیری و نقاط منظّم‌سازی همانند حالت #۱ در شکل (۵-۹) است. تنها تفاوت میان دو حل، در روش تعریف پارامترهای لغزش در دو روش است.

ابتدا حالت ۱ با زیرگسل‌های دارای لغزش ثابت را در نظر می‌گیریم، در این حالت ماتریس رزولوشن از رابطه‌ی (۵-۱۳) محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{Rm}_{\omega_j,\mathbf{C}} = (\mathbf{G}^T_{\omega_j}\mathbf{G}_{\omega_j} + \alpha^2_C \mathbf{L}^T\mathbf{L})^{-1}\mathbf{G}^T_{\omega_j}\mathbf{G}_{\omega_j} \quad (۵-۱۳)$$

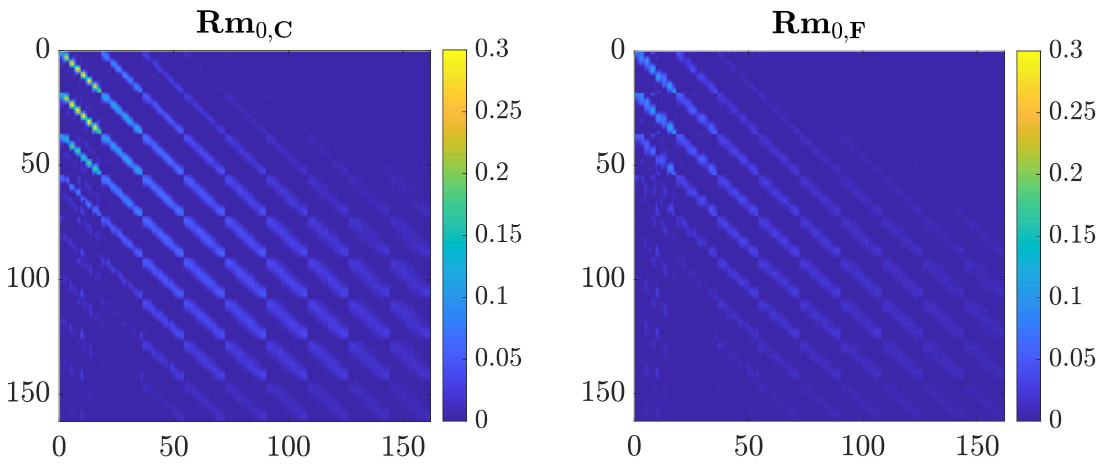
، که در آن $\mathbf{d}_{\omega_j} = \mathbf{G}_{\omega_j}\mathbf{u}_{\omega_j}$ رابطه‌ی مستقیم است و $\mathbf{u}_{\omega_j}$ بردار لغزش است که در زیرگسل‌های انتگرال‌گیری لغزش را نشان می‌دهد.

در حالت ۲، داده‌های یکسان در نظر گرفته می‌شوند $\mathbf{d}_{\omega_j}$، و لغزش $\mathbf{u}_{\omega_j}$ از گام آخر آموزش در روش فازی به دست می‌آید. با جایگزین کردن $\mathbf{A}_{\omega_j}$ از رابطه‌ی (۴-۱۶) در رابطه‌ی (۴-۱۲)، ماتریس رزولوشن مدل در روش فازی $\mathbf{Rm}_{\omega_j,\mathbf{F}}$ برابر می‌شود با:

$$\mathbf{Rm}_{\omega_j,\mathbf{F}} = \mathbf{W}_{\omega_j}(\mathbf{GW}^T_{\omega_j}\mathbf{GW}_{\omega_j} + \alpha^2_F \mathbf{LW}^T\mathbf{LW})^{-1}\mathbf{GW}^T_{\omega_j}\mathbf{G}_{\omega_j} \quad (۵-۱۴)$$

در این حالت نقاط گاوسی و نقاط منظّم‌سازی هم‌مکان هستند، به این دلیل زیرنویس reg , را از $\mathbf{W}_{\omega_j}$ حذف کرده‌ایم.

شکل (۵-۱۰) مقایسه میان ماتریس رزولوشن را در دوحالت ۱ و ۲ نشان می‌دهد. این نتایج بیانگر این است که افزایش پایداری در نتیجه‌ی استفاده از تقسیم‌بندی فازی، میزان وضوح را کاهش داده است. چنانکه انتظار می‌رود وضوح و پایداری را نمی‌توان همزمان بهبود بخشید.



شکل ۵-۱۰: ماتریس وضوح در فرکانس ۰ Hz. (الف) ماتریس وضوح روش کلاسیک گسل‌های محدود ($\mathbf{Rm}_{\circ}, \mathbf{C}$)، (ب) ماتریس وضوح با استفاده از روش فازی پس از ۵۰۰ دوره‌ی آموزش ($\mathbf{Rm}_{\circ,F}$). در روش فازی، جهت افزایش پایداری، وضوح کاهش یافته است.

۵-۹ مطالعه‌ی بوت استرپ

در این بخش به منظور بررسی خصوصیات آماری جواب به دست آمده از روش پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با روش کلاسیک گسسته‌سازی فضای مدل، از تکنیک‌های نمونه‌برداری[6] از داده‌ها استفاده می‌کنیم (برای آشنایی کامل با روش‌های نمونه‌برداری به فصل ۵ جیمز و همکاران [۲۰۱۳] مراجعه نمائید). از میان روش‌های نمونه‌برداری از داده‌ها، از روش بوت‌استرپ[7] برای مطالعه‌ی آماری مشخصات حل معکوس استفاده می‌شود. در روش بوت‌استرپ، از مجموعه‌ی داده‌های مسئله به صورت تصادفی نمونه‌برداری با جایگذاری[8] صورت می‌گیرد. سپس با هر یک از نمونه‌های برداشت شده، مسئله‌ی مورد نظر را حل کرده و مدل لغزش را، به همراه نُرم باقیمانده (معیار خطا) در مجموعه‌ای ذخیره می‌کنیم. با مطالعه‌ی آماری مجموعه‌ی جوابهای به دست آمده، می‌توان به تأثیر تغییر روش تقریب تابعی در روش پیشنهادی نوروفازی پی بُرد.

فرض کنید، مجموعه‌ای از داده‌های جابجایی ماندگار زمین، همچون $\{d_۱, d_۲, ..., d_n\}$ را در اختیار داریم و می‌خواهیم با استفاده از آنها لغزش ماندگار گسل را تعیین کنیم. به منظور تشخیص مناسب بودن نتیجه‌ی حل

[6]Resampling Methods
[7]Bootstrap
[8]Sampling with replacement

معکوس، میزان خطای مدلسازی را با استفاده از خطای ۴-۹ اندازه‌گیری می‌کنیم. یادآوری می‌شود که اگر خطای به دست آمده از رابطه‌ی ۴-۹ را بر تعداد داده‌ها تقسیم کنیم، به میانگین خطای مربعات[9] می‌رسیم که مفهوم **خطای مورد انتظار مدل‌سازی** را دارد. محاسبه‌ی این خطا در مورد داده‌هایی که در حل معکوس از آن استفاده کرده‌ایم، اهمیت زیادی ندارد. مهم این است که مدلسازی ما بتواند داده‌هایی که ندیده است را به خوبی پیش‌بینی کند. برای این منظور باید بخشی از داده‌ها را از فرایند حل معکوس (یا آموزش در یادگیری ماشین) خارج کنیم و از آنها برای تست مدل استفاده کنیم.

در این بخش، جهت بررسی بهبود نتایج حل معکوس در روش نوروفازی، مطالعه‌ی آماری نتایج با استفاده از روش بوت‌استرپ انجام شده، و نتایج آن را با روش کلاسیک تقسیم‌بندی گسل مقایسه می‌شود. در هر دو روش کلاسیک و نوروفازی از تعداد یکسانی نقاط گرین برای انتگرال‌گیری مستقیم استفاده می‌شود و نتایج بر روی مش‌بندی مشابهی نمایش داده می‌شوند. لازم به ذکر است که به منظور مطالعه‌ی اثر استفاده از تعداد توابع پایه‌ی اندک، در مدل‌سازی با روش نوروفازی از $N_\xi = ۴, N_\eta = ۴$ تابع پایه فازی استفاده شده است.

گام‌های روش بوت‌استرپ به شرح زیر است:

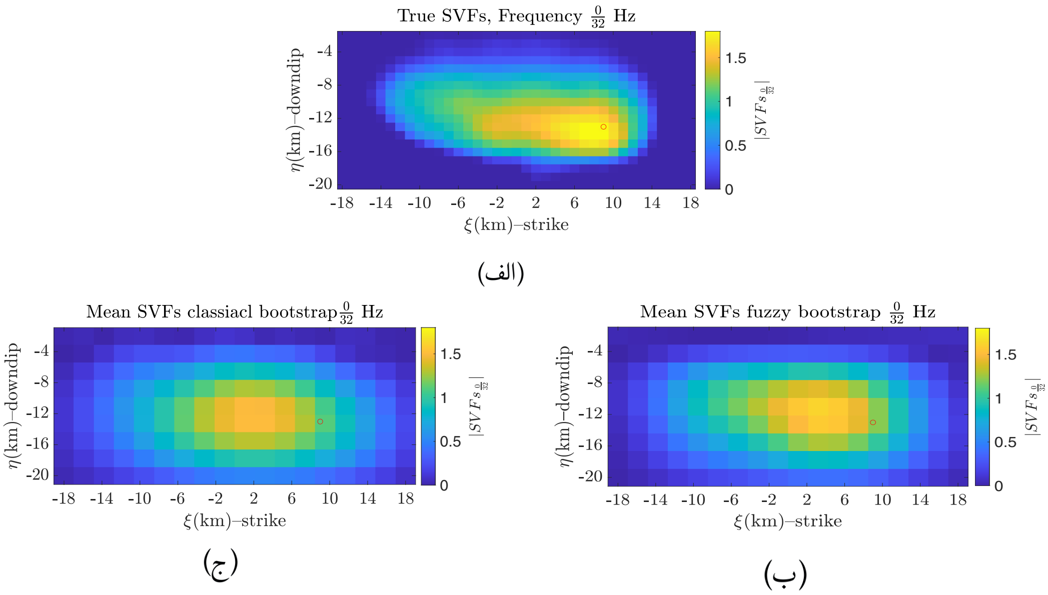
۱. مجموعه‌ی داده‌های مسئله‌ی SIV-inv1 را به دو بخش آموزشی (۸۰ درصد داده‌ها) و تست (۲۰ درصد داده‌ها) تقسیم می‌کنیم. اعداد ٪۸۰ و ٪۲۰ به صورت دلبخواه انتخاب شده‌اند (در آمار و یادگیری ماشین انتخاب این نسبت مرسوم است)، با توجه به اینکه در مسئله‌ی SIV-inv1، ۴۰ ایستگاه سه مولفه‌ای داریم (۱۲۰ داده)، ۹۶ داده‌ی آموزشی و ۲۴ داده‌ی تست خواهیم داشت.

۲. به صورت تصادفی، ۱۰۰ مرتبه داده‌های آموزشی مختلفی را انتخاب می‌کنیم. نمونه‌برداری به نحوی صورت می‌گیرد که امکان انتخاب بیش از یکبار یک داده وجود داشته باشد. داده‌های باقیمانده برای تست به کار می‌روند.

۳. داده‌های نمونه‌برداری شده را به هر دو شیوه‌ی کلاسیک و نوروفازی معکوس می‌کنیم و میزان MSE را برای داده‌های تست محاسبه می‌کنیم.

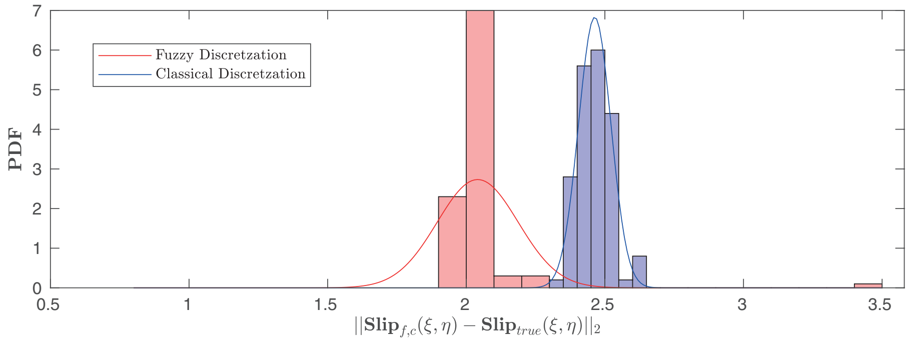
۴. میزان پراکندگی خطای لغزش $||Slip_{f,c} - Slip_{true}||_۲$، که در آن زیرنویس f مربوط به روش نوروفازی و زیرنویس c مربوط به روش کلاسیک است را به دست می‌آوریم.

[9] Mean Squared Error (MSE)

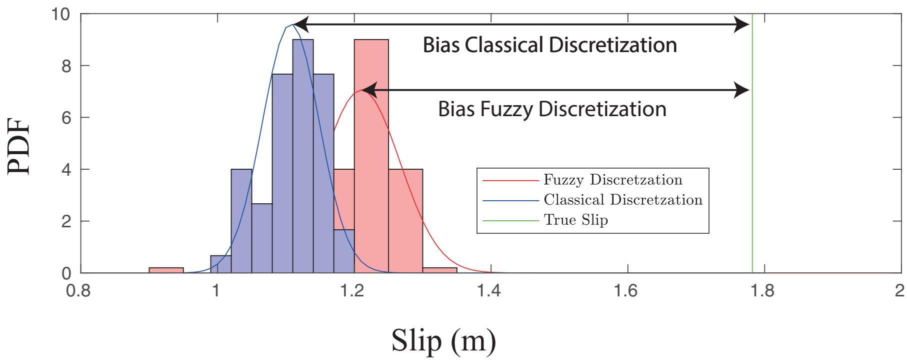


شکل ۵-۱۱: مطالعه‌ی آماری حل معکوس داده‌های مسئله‌ی SIV-inv1 با استفاده از روش بوت‌استرپ. (الف) مدل لغزش درست، (ب) مدل میانگین، به دست آمده از میانگین‌گیری ۱۰۰ مدل معکوس شده با استفاده از روش نوروفازی، (ج) مدل میانگین از حل معکوس با روش کلاسیک مجزاسازی گسل با استفاده از زیر گسل‌های با لغزش ثابت. نتایج مطالعه‌ی بوت‌استرپ برای نقطه‌ای که با دایره‌ی قرمز بر روی گسل نشان داده شده است در شکل ۵-۱۳ نشان داده می‌شود.

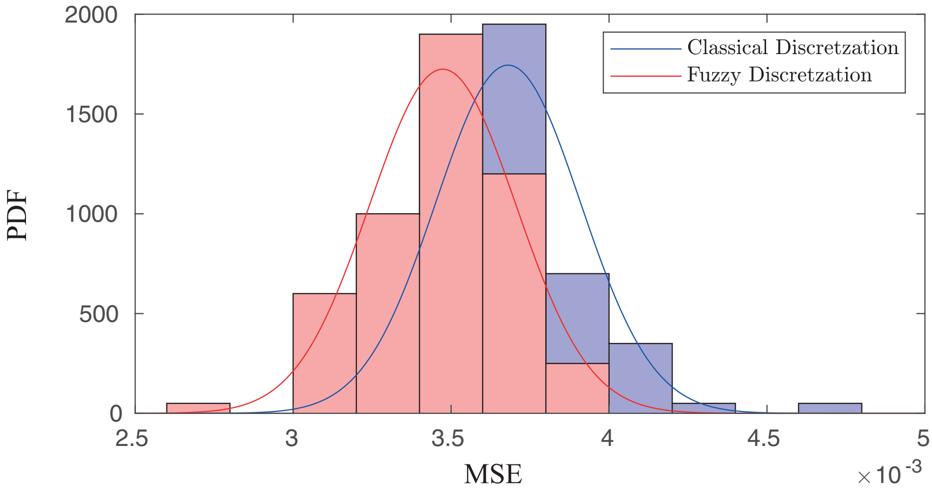
شکل ۵-۱۱ مدل لغزش درست را به همراه مدل میانگین روش نوروفازی (شکل ۵-۱۱ب)، و مدل میانگین روش کلاسیک (شکل ۵-۱۱ج) نمایش می‌دهد. مدل میانگین از میانگین‌گیری تمامی ۱۰۰ حل معکوس با استفاده از نمونه‌برداری تصادفی از داده‌ها به دست آمده است. میزان سوگیری نتایج حل معکوس به دست آمده از دو روش کلاسیک و نوروفازی در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است. فاصله‌ی افقی بیشتر از مبدأ (صفر) نشان‌دهنده‌ی سوگیری بیشتر است. همچنین توزیع آماری لغزش در نقطه‌ی مشخص شده با دایره‌ی قرمز در شکل ۵-۱۱ برای این ۱۰۰ حل معکوس در شکل ۵-۱۳ نمایش داده شده است. در شکل‌های ۵-۱۲ و ۵-۱۳، هیستوگرام قرمز رنگ توزیع فراوانی نتایج روش نوروفازی و هیستوگرام آبی رنگ، توزیع فراوانی روش کلاسیک را نشان می‌دهد. در شکل ۵-۱۳، با توجه به فاصله‌ی این دو جواب با خط قائم سبز رنگ (جواب درست)، مشاهده می‌شود که روش نوروفازی با سوگیری کمتری نتیجه‌ی درست را تقریب می‌زند. توزیع آماری خطا با داده‌های تست (۲۴ داده‌ای که معادل ۲۰٪ داده‌ها هستند)، در شکل ۵-۱۴ نمایش داده شده است. بر اساس نتایج بوت‌استرپ، خطای شبیه‌سازی در داده‌های تست، در روش نوروفازی از روش کلاسیک کمتر است.



شکل ۵-۱۲: سوگیری نتایج حل معکوس $||Slip_{f,c} - Slip_{true}||_۲$ در دو روش نوروفازی (هیستوگرام قرمز رنگ) و کلاسیک با زیر گسل‌های با لغزش ثابت (هیستوگرام آبی رنگ). فاصله‌ی بیشتر از صفر در هیستوگرام‌ها نشان‌دهنده‌ی سوگیری بیشتر در نتایج حل معکوس است. همانطور که در این شکل دیده می‌شود، سوگیری روش نوروفازی کمتر از سوگیری در روش کلاسیک است.



شکل ۵-۱۳: توزیع آماری ۱۰۰ حل معکوس، در نقطه‌ی مشخص شده با دایره‌ی قرمز رنگ در شکل ۵-۱۱. خط قائم سبز رنگ مقدار جواب درست را نشان می‌دهد. هیستوگرام قرمز نتایج حل با استفاده از روش نوروفازی و هیستوگرام آبی، نتایج حل با استفاده از روش کلاسیک را نمایش می‌دهند. بر اساس هیستوگرام‌های فوق، نتایج روش نوروفازی دارای سوگیری کمتری هستند.

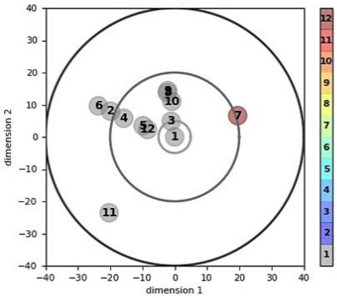


شکل ۵-۱۴: توزیع آماری میانگین مربعات خطای مدلسازی داده‌های تست، برای دو روش حل با استفاده از روش نوروفازی (هیستوگرام قرمز) و کلاسیک (هیستوگرام آبی). خطای شبیه‌سازی با استفاده از روش نوروفازی بر روی داده‌های تست که در حل معکوس مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، کمتر از روش کلاسیک است.

۵-۱۰ مقیاس کردن چندبُعدی

روش مقیاس کردن چندبُعدی[۱۰] (MDS) برای رتبه‌بندی نتایج حل معکوس سینماتیکی توسط رازافیندراکاتو و همکاران [۲۰۱۵] ارائه شد. روش مقیاس کردن چندبُعدی (MDS)، تفاوت بین مدل‌های لغزش به دست آمده از روش‌های مختلف را کمّی می‌کند. هدف روش MDS تصویر کردن عدم شباهت‌ها[۱۱] میان مدل‌های لغزش، به فضای اقلیدسی است. می‌توان عدم شباهت را در فضاهای کم بُعد (دو/سه بعدی) نمایش داد، به نحوی که مدل‌های شبیه/ناشبیه دارای فواصل نزدیک/دور از یکدیگر قرار بگیرند و به آسانی بتوان آن را نمایش داد. عدم شباهت میان روش‌های مختلف توسط یک ماتریس به دست می‌آید، که در هر یک از درایه‌های آن، مقادیر معیار عدم شباهت دو مدل محاسبه شده است. رازافیندراکاتو و همکاران [۲۰۱۵] از دو معیار عدم شباهت gray-scale و normalized-square برای تحلیل MDS استفاده نمود. پروژه‌ی SIV [مای و همکاران، ۲۰۱۶] یک ابزار آنلاین توسعه داده است (http://equake-rc.info/SIV/sivtools/show-scalar-metrics/MDS/inv1/ که امکان رده‌بندی حل‌های معکوس را بر اساس معیار شباهت normalized-square به دست می‌دهد. نتایج این

[10] Multidimensional Scaling
[11] Dissimilarities



Ranking with respect to the reference

Excellent	Good	Fair	Poor
SIVdata (1) fsg (3)	gallovic (4) gallovic2 (5) hobyy1 (8) hobyy3 (9) navid (10) somala1 (12)	causse (2) gallovic3 (6) hobyt (7) somala (11)	

Dissimilarity matrix

Solution	SIVdata	causse	fsg	gallovic	gallovic2	gallovic3	hobyt	hobyy1	hobyy3	navid	somala	somala1
SIVdata	0.00	28.15	3.07	20.18	8.65	24.06	22.83	21.79	22.30	7.44	29.71	12.25
causse	28.15	0.00	27.39	24.38	19.01	18.16	35.82	38.79	28.37	23.97	32.55	24.37
fsg	3.07	27.39	0.00	19.57	5.98	20.11	22.72	17.40	16.58	2.97	32.34	9.03
gallovic	20.18	24.38	19.57	0.00	11.32	9.04	41.83	24.98	32.88	19.87	35.36	18.65
gallovic2	8.65	19.01	5.98	11.32	0.00	10.83	29.31	21.29	18.50	7.31	25.98	10.05
gallovic3	24.06	18.16	20.11	9.04	10.83	0.00	45.24	21.04	27.17	19.52	30.65	16.83
hobyt	22.83	35.82	22.72	41.83	29.31	45.24	0.00	36.52	31.79	23.15	51.59	28.05
hobyy1	21.79	38.79	17.40	24.98	21.29	21.04	36.52	0.00	33.71	16.48	46.19	19.70
hobyy3	22.30	28.37	16.58	32.88	18.50	27.17	31.79	33.71	0.00	11.62	44.17	21.21
navid	7.44	23.97	2.97	19.87	7.31	19.52	23.15	16.48	11.62	0.00	38.53	10.44
somala	29.71	32.55	32.34	35.36	25.98	30.65	51.59	46.19	44.17	38.53	0.00	24.64
somala1	12.25	24.37	9.03	18.65	10.05	16.83	28.05	19.70	21.21	10.44	24.64	0.00

Each element represents a measure of dissimilarity between pairs of models obtained using *normalized square metric*

شکل ۵-۱۵: رده‌بندی نتایج حل معکوس نسبت به جواب درست مثال SIV-inv1 ثبت شده توسط ابزار برخط (http://equake-rc.info/SIV/sivtools/show-scalar-metrics/MDS/inv1/). جواب شماره‌ی ۱۰ مربوط به حل معکوس ما با استفاده از $(N_\xi = ۶, N_\eta = ۶)$ می‌باشد. این جواب با اندیس عدم شباهت ۷٫۴۴ در رده‌ی دوم پس از حل فَن و همکاران [۲۰۱۴] با اندیس عدم شباهت ۳٫۰۷ قرارگرفته است.

تحلیل برای مجموعه‌ای از حل‌های معکوس بارگذاری شده در وبسایت SIV در شکل ۵-۱۵ نشان داده شده است. بر اساس شکل ۵-۱۵، جواب حل معکو ما با استفاده از $N_\xi = ۶, N_\eta = ۶$ در رده‌ی جواب‌های خوب قرارگرفته است. بر اساس نتایج روش MDS میزان اندیس عدم شباهت روش ما نسبت به جواب درست SIV-inv1 برابر ۷٫۴۴ است. با این عدد نتایج روش ما در رده دوم قرارگرفته است. بالاترین امتیاز مربوط به روش فَن و همکاران [۲۰۱۴] است که دارای اندیس عدم شباهت ۳٫۰۷ می‌باشد.

فصل ۶

ارزیابی روش پیشنهادی با استفاده از داده‌های واقعی زلزله‌ی ۲۴ آگوست ۲۰۱۶ آماتریچه با بزرگای ۶/۲ M_w

۶-۱ مقدمه

در فصول قبلی روش حل معکوس لغزش گسل با استفاده از روش پیشنهادی فازی را تشریح نمودیم، هدف روش فازی افزایش میزان پایداری حل معکوس با کاهش تعداد پارامترهای مکانی لغزش است. روش ارائه شده، حل معکوس را در فضای فرکانسی انجام می‌دهد. صحت این روش در فصل (۴) با استفاده از داده‌های مثال سینتتیک SIV-inv1 (بخش ۴-۴) مورد بررسی قرار گرفت. در این فصل، می‌خواهیم عملکرد روش پیشنهادی را با استفاده از داده‌های واقعی ثبت شده طی زمین‌لرزه آماتریچه مورد بررسی قرار بدهیم. این زمین‌لرزه، یکی از بهترین زمین‌لرزه‌های ثبت شده در سال‌های اخیر است و داده‌های با کیفیت و در دسترس عموم از آن موجود می‌باشد، و مطالعات متعدد پیشین [همچون، تینتی و همکاران، ۲۰۱۶؛ مانگونی و کازاروتی، ۲۰۱۶؛ هوآنگ و همکاران، ۲۰۱۷؛ پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷؛ سیرِلا و همکاران، ۲۰۱۸؛ گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b؛ آئوچی و توآردزیک، ۲۰۱۹] با دقت و جزئیات خصوصیات چشمه‌ی آن را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

زمین‌لرزه‌ی آماتریچه در ۲۴ آگوست ۲۰۱۶ در مرکز ایتالیا رخ داده است. وبسایت Global CMT بزرگای

گشتاوری ۶٫۲ M_w را بدان منتسب کرده است [اِکستروم و همکاران، ۲۰۱۲]، و مرکز لرزه‌نگاری INGV بزرگای آن را برابر ۶٫۰ M_w گزارش کرده است (http://terremoti.ingv.it/en/event/7073641). این زمین‌لرزه در زمره‌ی زمین‌لرزه‌های کم‌عمق قرار دارد و براساس مطالعه‌ی [چیاralوچی و همکاران، ۲۰۱۷] در عمق تقریبی ۸ km زیر سطح زمین رُخ داده است. در اثر وقوع این زمین‌لرزه، جنبش نسبتاً شدید زمین در شهرهای آماتریچه[1] و نورچا[2]، که به ترتیب در فواصل ۱۰ km و ۱۵ km در جنوب شرقی، و شمال غربی رومرکز[3] قرار گرفته‌اند. این زمین‌لرزه موجب کشته شدن حدوداً ۳۰۰ نفر شده است. رومرکز این زمین‌لرزه در فاصله‌ی تقریبی ۴۰ km در سمت شمال شرقی زمین لرزه‌ی ۲۰۰۹ لاکیلا[4] با بزرگای ۶٫۳ M_w قرار گرفته است. زمین‌لرزه‌ی ۶٫۲ M_w آماتریچه در دنباله‌ی خود رشته‌ای از زمین‌لرزه‌ها را در پی داشته است که در میان آن‌ها دو زمین‌لرزه بزرگای بیشتر از ۶ داشته‌اند: زمین‌لرزه‌ی ۶٫۱ M_w اوسیتا[5] در ۲۶ اکتبر ۲۰۱۶ و زمین‌لرزه ۶٫۵ M_w نورچا در ۳۰ اکتبر ۲۰۱۶ [چیارالوچی و همکاران، ۲۰۱۷؛ پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷]. هر سه زمین‌لرزه‌ی با بزرگای بیشتر ۶ دارای ساز و کار نرمال بوده‌اند، که منطبق بر رژیم گسلش کششی در منطقه‌ی آپنینس مرکزی[6] است [پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷]. زمین‌لرزه آماتریچه به خوبی ثبت شده است و دارای مجموعه‌ای غنی از شتابنگارها و داده‌های نرخ-بالای GNSS می‌باشد (شکل ۶-۱).

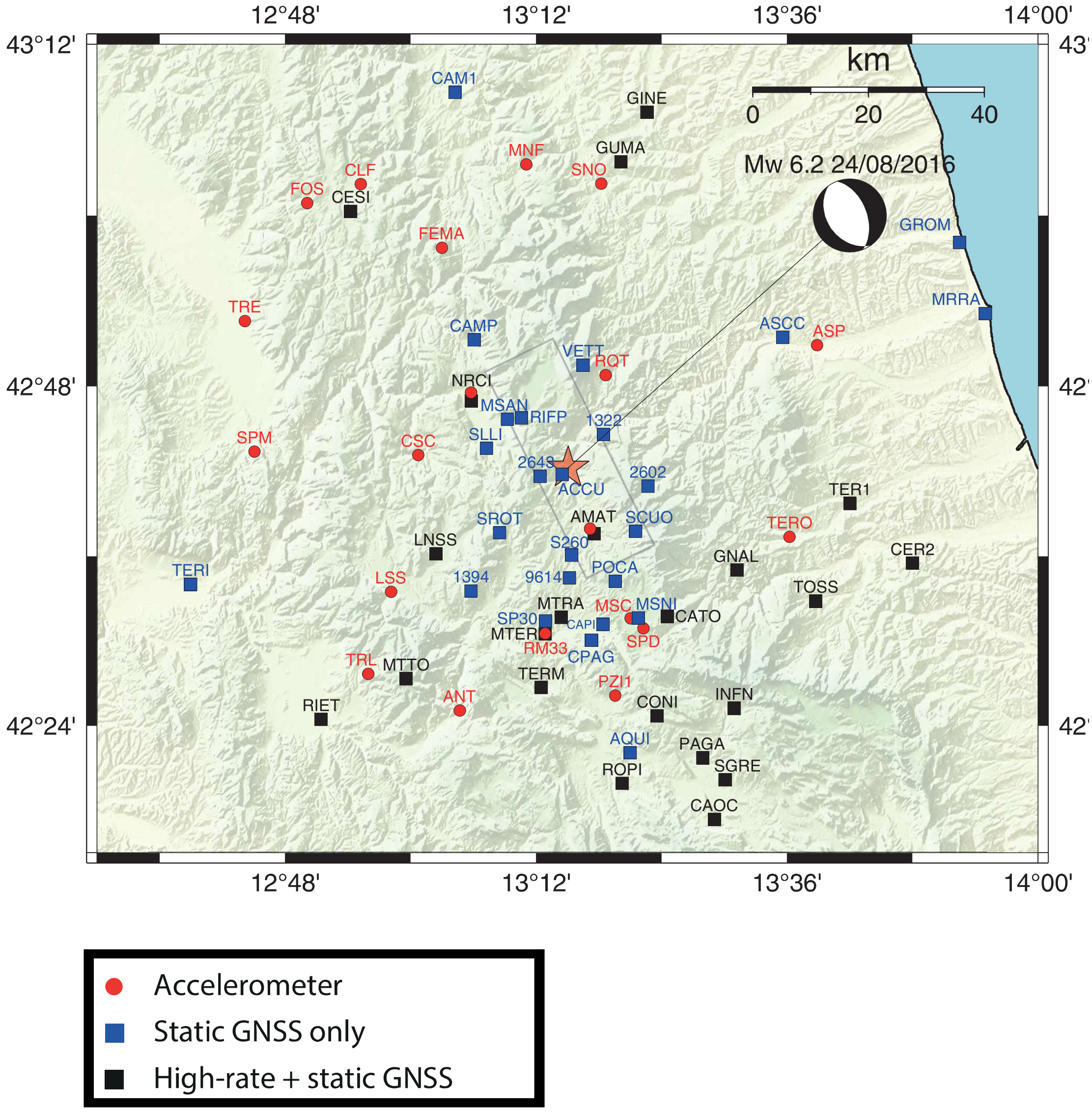
حل سریع گسل‌های محدود[7] که با استفاده از داده‌های جنبش نیرومند انجام شد، نشان‌دهنده‌ی یک شکست دوسویه است، به نحوی که شکستگی از نقطه‌ی آغاز آن به سمت دو انتهای گسل منتشر می‌شود به نحوی که لغزش نهایی آن، دو تنشگاه[8] را در هر یک از دو سوی کانون نشان می‌دهند [تینتی و همکاران، ۲۰۱۶]. همچنین، داده‌های ژئودتیک اینسار از ماهواره‌های ALOS-2 و Sentinel-1 نیز وجود دو ناحیه‌ی مشخص با تغییر شکل زیاد را بر روی سطح زمین، بر بالای محل لغزش گسل نشان می‌دهند، یکی در سوی شمال غربی و دیگری در سمت جنوب شرقی کانون و با انطباق خوبی با دو تنشگاه پیشنهادی توسط حل‌های گسل‌های محدود [لاوکچیا و همکاران، ۲۰۱۶؛ چلونی و همکاران، ۲۰۱۷؛ هوآنگ و همکاران، ۲۰۱۷؛ والترز و همکاران، ۲۰۱۸]. مدلسازی‌های پیشرفته‌تر که با استفاده از داده‌های اینسار ثبت شده توسط ماهواره‌ی ALOS-2 و مدلسازی سه‌بُعدی اجزای محدود انجام شد،

[1] Amatrice
[2] Norcia
[3] Epicenter
[4] L'Aquila
[5] Ussita
[6] Central Apennines
[7] Rapid finite-fault inversion
[8] Asperity

فرضیه‌ی هندسه‌ی مسطح یا قاشقی [9] را با یکدیگر مقایسه نمود [تانگ و مسترلارک، ۲۰۱۸]. نویسندگان مقاله فوق نتیجه‌گیری کردند که فرضیه‌ی هندسه مسطح امکان مدلسازی مناسب را برای گسل مسبب زمین لرزه آماتریچه می‌دهد. مطالعه‌ی سینماتیکی زمین‌لرزه‌ی آماتریچه با بزرگای ۶/۲ M_w، زمین‌لرزه‌ی اوسیتا با بزرگای ۶/۱ M_w و زمین‌لرزه‌ی نورچا با بزرگای ۶/۵ M_w توسط پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] با روش پیشنهادی گالوویچ و همکاران [۲۰۱۵] انجام شد. نویسندگان پیشنهاد داده‌اند که گسل تراستی .Sibillini Mts که با قدمت میوسن-پلیوسن [10] با گسل‌های فعال منطقه برخورد کرده است، به عنوان یک مانع ساختاری برای گسترش لغزش عمل کرده است. این نتایج توسط [اسکاگنامیگلیو و همکاران، ۲۰۱۸] مورد تأیید قرار گرفت که نشان می‌دهد که لغزش زمین‌لرزه‌ی ۶/۵ M_w نورچا بر روی دو صفحه‌ی متصل به هم صورت گرفته است، یک صفحه‌ی بزرگ که مابین سیستم‌های گسلی (Mt. Vettore-Mt. Bove (VBFS و (Laga Mts. (LMFS ارتباط برقرار کرده است و یک صفحه‌ی کوچک که بر روی گسل .Sibillini Mts قرار گرفته است و صفحه‌ی بزرگتر را قطع می‌کند. گسل .Sibillini Mts نرخ بارگذاری را میان سیستم‌های گسلی که در دو سمتش قرار گرفته‌اند تقسیم کرده و فعال شدن هر یک از دو قسمت را حین زمین‌لرزه آماتریچه و نورچا کنترل کرده است. آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] با استفاده از یک روش ترکیبی بر مبنای معادله‌ی انتگرال مرزی و روش تفاضل محدود (FD) برای شبیه‌سازی دینامیکی شکست گسل و انتشار موج مربوطه استفاده کردند. گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] از روشی نوین بر مبنای روش حل معکوس بیزی، برای یافتن بهترین مدل شکست و پارامترهای آن استفاده کردند. این پارامترها شامل تنش اولیه بر روی گسل (τ_i)، تفاوت بین ضرایب اصطکاک استاتیکی و دینامیکی $(\mu_s - \mu_d)$ و فاصله‌ی مشخصه‌ی لغزش-تضعیف [11] (D_c) می‌باشد.

فرمولبندی مسأله در حوزه‌ی فرکانسی، این مزیت را دارد که می‌توان از مجموعه داده‌های متفاوت که با فناوری‌های گوناگونی که در محدوده‌های فرکانسی متفاوتی از حرکت زمین دارای حساسیت مطلوب هستند، در یک فرمول‌بندی استفاده کرد. برای مثال، داده‌های اینسار تصویری با نمونه‌های مکانی فراوان، از تغییر مکان سطح زمین در اثر یک زمین‌لرزه به دست می‌دهد. با این حال، چون داده‌های اینسار فقط تغییر مکان استاتیکی سطح زمین را ثبت می‌کنند، فقط برای مولفه‌ی استاتیکی لغزش $(f \approx 0)$ Hz کاربرد دارند. این استدلال برای داده‌های high-rate GNSS نیز پابرجاست، این تکنولوژی حرکت زمین را در محدوده‌ی فرکانسی $(f \approx 0)$ Hz تا فرکانس نایکوئیست (نصف فرکانس نمونه برداری) ثبت می‌کند، که به عنوان مثال، اگر فرکانس نمونه برداری برابر

[9] Listric
[10] Miocene-Pliocene
[11] Slip-weakening



شکل ۶-۱: ناحیه‌ی رومرکز زمین‌لرزه ۲۴ آگوست ۲۰۱۶ آماتریچه در مرکز ایتالیا. داده‌های مورد استفاده در این مطالعه شامل ۲۸ ایستگاه حوزه‌ی نزدیک جابجایی سنج GNSS با فاصله‌ی (< ۶۰ km) از رومرکز زمین‌لرزه (مربع) و نگاشت‌های جنبش نیرومند زمین (دایره). از میان ۲۸ داده‌ی GNSS، ۲۲ ایستگاه مجهز به فناوری ثبت نرخ-بالا بوده‌اند (مربع‌های سیاه) و ۶ ایستگاه باقی‌مانده تنها تغییر شکل استاتیکی زمین را ثبت کرده‌اند (مربع‌های آبی). دایره‌های قرمز رنگ، ۲۰ ایستگاه شتابنگاری را مشخص می‌کنند که داده‌های آن در بانک اطلاعاتی ESM موجود می‌باشد [لوزی و همکاران، ۲۰۱۶]. به منظور مقایسه‌ی نتایج روش حل معکوس فازی با مطالعات پیشین، از داده‌های ایستگاه‌هایی که قبلا توسط پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] و گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] مورد استفاده قرار گرفته بود، استفاده کرده‌ایم. در این شکل، رومرکز زمین‌لرزه با دایره‌ی قرمز مشخص شده است [چیارالوچی و همکاران، ۲۰۱۷]. ساز و کار کانونی نشان‌داده شده بر روی شکل نشان‌دهنده‌ی ساز و کار نُرمال زمین‌لرزه‌ی آماتریچه، با زاویه‌ی امتداد در راستای NW-SE می‌باشد. (http://terremoti.ingv.it/en/event/7073641).

۱ Hz باشد، فرکانس نمونه برداری برابر ۰٫۵ Hz خواهد بود.از سوی دیگر، ایستگاه‌های باند پهن و شتابنگاری برای ثبت تغییر مکان دینامیکی ساخته شده‌اند و به تغییر مکان سطح زمین در فرکانس‌های بالا ($> ۰٫۰۱$ Hz) حساس هستند، که البته اطلاعاتی کلیدی برای مطالعه‌ی چشمه‌ی لرزه‌زا در اختیارمان قرار می‌دهند. با این حال حساسیت آنها به تغییر مکان استاتیکی و فرکانس‌های پایین‌تر، محدود است.

در این فصل، از مجموعه داده‌های متفاوتی برای حل معکوس در فرکانس‌های مختلف استفاده کرده‌ایم. در این راستا از داده‌های ۴۷ ایستگاه GNSS با داده‌های استاتیکی با فاصله‌ی کمتر از ۶۰ کیلومتر تا کانون زمین‌لرزه [چلونی و همکاران، ۲۰۱۷] برای تعیین جواب در فرکانس Hz ($f = ۰$) استفاده شده است. همچنین از مجموعه داده‌های ۲۲ ایستگاه high-rate GNSS [آوالونه و همکاران، ۲۰۱۶] برای به دست آوردن جواب در محدوده‌ی فرکانسی بین ۰٫۰۳ Hz تا ۰٫۰۶ Hz استفاده شده است. در نهایت، در محدوده‌ی فرکانسی بین ۰٫۵ Hz $-$ ۰٫۰۶ از داده‌های جنبش نیرومند استفاده شده است. در این بخش، به منظور مقایسه‌ی و ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی این رساله با جواب [پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷؛ گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b] از داده‌های شتابنگاری این مقالات استفاده می‌کنیم و داده‌های high-rate GNSS را در حل آن فرکانس‌ها وارد نمی‌کنیم. با این حال، از این داده‌ها برای ارزیابی کیفیت جواب استفاده کرده و جوابهای سنتز شده را در ایستگاه‌های high-rate GNSS با داده‌های ثبت شده در محدوده‌ی فرکانسی ۰٫۵ Hz $-$ ۰٫۰۶ مقایسه می‌کنیم.

۶-۲ داده‌ها و مدل سرعت-چگالی-کاهندگی

در این بخش، جهت به دست آوردن مدلِ لغزش زمین‌لرزه‌ی آماتریچه، از سه مجموعه داده که برای عموم دارای دسترسی آزاد هستند، استفاده کرده‌ایم: ۱) داده‌های GNSS استاتیکی، ۲) شکلِ موج‌های نرخ‌بالا[12]ی GNSS، و ۳) شتابنگاشت‌های جنبش نیرومند زمین. چنانکه در بخش ۶-۱ ذکر شد، هر یک از این داده‌ها در محدوده‌ی فرکانسی مشخصی به حرکت زمین حساس هستند. از همین رو: از ۱) داده‌های استاتیکی GNSS برای مقید کردن لغزش استاتیکی در فرکانس $f = ۰$ Hz؛ ۲) داده‌های HR-GNSS برای مقید کردن مولفه‌های ۰٫۰۳ Hz تا ۰٫۰۶ Hz؛ و ۳) از داده‌های جنبش نیرومند برای مقید کردن مولفه‌های حرکت زمین در فرکانس‌های بیشتر از ۰٫۰۶ Hz و کمتر از ۰٫۵ Hz استفاده کرده‌ایم.

مجموعه‌ی متراکمی از داده‌های استاتیکی GNSS از چلونی و همکاران [۲۰۱۷] برداشته شده است. داده‌های

[12] High-rate

نرخ‌بالای GNSS از آوالونه و همکاران [۲۰۱۶] برداشته شده است. نویسندگان مقالات فوق، داده‌های GNSS را از شبکه‌های مختلفی همچون [کارگروه Ring مرکز INGV و دیگران، ۲۰۱۶] (http://ring.gm.ingv.it/)، CaGeoNet INGV گالوانی و همکاران [۲۰۱۳]، ISPRA (https://www.isprambiente.gov.it/)، Regione Lazio (http://gnss-regionelazio.dyndns.org/Spiderweb/frmIndex.aspx)، Regione Abruzzo (http://gnssnet.regione.abruzzo.it/)، ITALPOS (http://it.smartnet-eu.com/) و NATGEO (http://www.netgeo.it/) جمع‌آوری کرده‌اند. داده‌های سری زمانی نرخ‌بالای GNSS دارای نرخ‌های نمونه‌برداری متفاوت، شامل ۰/۰۵، ۰/۱، ۰/۵ و ۱ ثانیه، بسته به ایستگاه مربوط بوده که به ترتیب فرکانس نایکوئیست آنها ۱۰ Hz، ۵ Hz، ۱ Hz و ۰/۵ Hz می‌باشد.

داده‌های شتابنگاری توسط دو شبکه ثبت شده است: شبکه‌ی شتابنگاری ایتالیا (IT) [شورای وزیران دولتی ایتالیا - بخش حفاظت مدنی، ۱۹۷۲] و شبکه‌ی لرزه‌نگاری ملی ایتالیا (IV) [مرکز داده‌ی لرزه‌ای INGV، ۱۹۹۷]. این داده‌ها از بانک داده‌های جنبش نیرومند زمین اُرفیوس[13] [لوزی و همکاران، ۲۰۱۶] دانلود شده‌اند.

شکل ۶-۱ ایستگاه‌هایی که داده‌های آن در حل معکوس مورد استفاده قرار گرفته‌اند را نشان می‌دهد. داده‌های استاتیکی در تمامی ۴۷ ایستگاه GNSS نشان داده شده بر نقشه، با فاصله‌ای کمتر از ۶۰ کیلومتر با کانون، ثبت شده‌اند. از این میان، ۲۲ ایستگاه داده‌ها را با نرخ بالا (مربع‌های سیاه) نموده و مابقی ۲۵ ایستگاه (مربع‌های آبی)، تنها جابجایی استاتیکی را ثبت نموده‌اند. علاوه بر این، از داده‌های جنبش نیرومند نزدیکترین ایستگاه‌ها به کانون (دایره‌های قرمز) استفاده نموده‌ایم. این مجموعه شامل ۲۰ ایستگاه در فاصله‌ای کمتر از ۵۰ کیلومتر با کانون بوده و به منظور مقایسه با مطالعات پیشین [پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷؛ گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b] دقیقا منطبق با آن مطالعات می‌باشند. داده‌های جنبش نیرومند شامل ۱۹ شتابنگاشت ۳ مولفه‌ای هستند، و فقط ایستگاه RQT است که مولفه‌ی شمالی-جنوبی در آن موجود نیست.

داده‌های GNSS پردازش شده در این فصل توسط سه مرکز پردازش داده در INGV تحلیل شده‌اند، جزئیات این روشها در آوالونه و همکاران [۲۰۱۰]، سرپِلونی و همکاران [۲۰۱۲]، و چِلونی و همکاران [۲۰۱۶] آمده است. داده‌های نرخ‌بالای GNSS از آوالونه و همکاران [۲۰۱۶] برداشته شده‌اند، که در آن داده‌های خام GNSS با دو روش متفاوت پردازش شده‌اند: روش موقعیت نقطه‌ی دقیق[14] [زومبرگ و همکاران، ۱۹۹۷؛ برتیگر و همکاران، ۲۰۱۰] و روش تفاضل دوگانه[15] [هرینگ و همکاران، ۲۰۱۰]، که به ترتیب در بسته‌های نرم‌افزاری GAMIT/GLOBK

[13] Orfeus
[14] Precise Point Position (PPP)
[15] Double-Difference (DD)

(http://geoweb.mit.edu/gg/) و Gipsy/Oasis (https://gipsy-oasis.jpl.nasa.gov/) پیاده‌سازی شده‌اند. مقایسه میان نتایج دو روش بیانگر انطباق خوب میان دو دسته جواب است. در این مطالعه، از نتایج سری‌های زمانی تصحیح شده به وسیله‌ی کد GIPSY/Oasis II استفاده کرده‌ایم. داده‌های نرخ‌بالای GNSS توسط فیلتر پایین گذر با فرکانس گوشه‌ی ۰/۵ Hz، فیلتر شده‌اند.

برای حل معکوس، پنجره‌ای از شکل موج با طول ۳۲ ثانیه، از زمان مبدأ[16] زمین‌لرزه انتخاب شده است. این پنجره شامل موج P و S در تمامی ایستگاه‌ها می‌شود. به منظور جلوگیری از اثرات برش سیگنال[17] از تابع پنجره‌ی هنینگ[18] با ۰/۰۵ کم‌کاهی[19] استفاده شده است. به منظور استفاده در حل معکوس، داده‌های شتابنگاری با استفاده از یک فیلتر مرتبه چهار باتروورث[20] بین فرکانس‌های ۰/۰۵ Hz و ۰/۵ Hz فیلتر شده‌اند. در نهایت از داده‌های شتاب انتگرال‌گیری کرده‌ایم تا به شکل موج‌های سرعت برسیم. درنهایت به منظور افزایش سرعت محاسبات، نرخ نمونه‌برداری به ۴ sps ($\Delta t = ۰/۲۵$ sec) تغییر یافته است. در این حل معکوس به داده‌ها وزن نداده‌ایم و همگی داده‌ها با وزن یکسان در حل معکوس مشارکت داشته‌اند.

در این حل معکوس داده‌های فراوانی در محدوده‌ی فرکانس‌های بالا ($۰/۰۶ < f < ۰/۵$ Hz) داریم، چنانکه هر دو مجموعه‌ی شتابنگاشت و HR-GNSS میدان موج دینامیکی را ثبت کرده‌اند. در این مطالعه، از این فراوانی داده‌ها برای ارزیابی کیفیت حل و مدل لغزش بهره جسته‌ایم: از داده‌های جنبش نیرومند برای حل معکوس و یافتن مدل در محدوده‌ی فرکانسی فوق‌الذکر استفاده می‌شود و برای ارزیابی حل، شکل موج‌های شبیه‌سازی شده را با داده‌های HR-GNSS، که در حل معکوس استفاده نشده‌اند، مقایسه می‌کنیم. انطباق میان شکل موج‌ها، شامل دامنه‌ی موج و زمان رسید فازها، در این دسته از داده‌ها که در حل معکوس مورد استفاده قرار نگرفته‌اند، معیاری را برای ارزیابی مناسب بودن مدل لغزش به دست می‌دهد.

مدل سرعتی منطقه‌ی آپنینس مرکزی، در مطالعات قبلی که بر زمین‌لرزه‌ی M_w ۶/۳ سال ۲۰۰۹ لاکیلا متمرکز بودند، به خوبی بررسی شده است. در این مطالعه از مدل سرعت-چگالی-کاهندگی یک بعدی ارائه شده توسط [آمری و همکاران، ۲۰۱۲] استفاده کرده‌ایم (جدول ۶-۱).

[16] Origin-time
[17] Cut-off effect
[18] Hanning window
[19] Taper
[20] Butterworth

جدول ۶-۱: مدل یک بُعدی (1D) چگالی-کاهندگی-سرعت برای منطقه‌ی لاکیلا [آمری و همکاران، ۲۰۱۲].

(m)ضخامت	$V_p(\frac{m}{s})$	$V_s(\frac{m}{s})$	$(\frac{kg}{m^3})$چگالی	Q_p	Q_s
۱۰۰۰	۳۱۶۰	۱۷۰۰	۲۵۰۰	۲۰۰	۱۰۰
۱۰۰۰	۴۸۳۰	۲۶۰۰	۲۸۴۰	۴۰۰	۲۰۰
۳۰۰۰	۵۷۶۰	۳۱۰۰	۲۹۴۰	۴۰۰	۲۰۰
۲۲۰۰۰	۶۵۱۰	۳۵۰۰	۳۱۵۰	۴۰۰	۲۰۰
۱۵۰۰۰	۷۰۰۰	۳۸۰۰	۳۲۶۰	۶۰۰	۳۰۰
۱۸۰۰۰	۷۸۰۰	۴۲۰۰	۳۵۰۰	۸۰۰	۴۰۰

۶-۳ پارامتری سازی حل معکوس

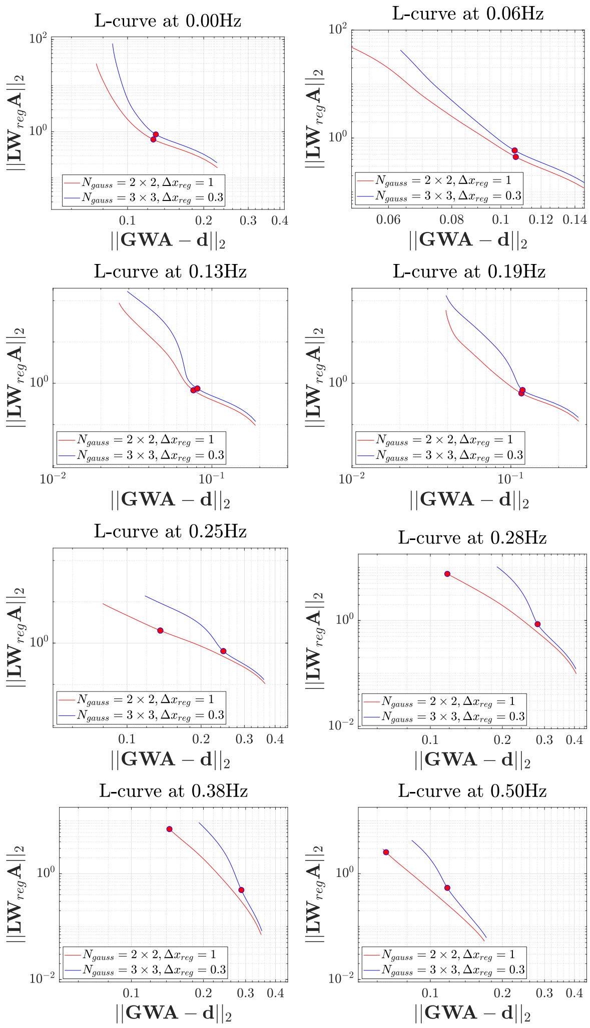
هدف اصلی در حل معکوس گسل‌های محدود با روش نوروفازی، کاستن از تعداد پارامترهای مورد استفاده در توصیف تابع لغزش است تا بدین وسیله از ابعاد فضای تهی مدل کاسته شود. به منظور داشتن یک مسئله‌ی فرامعیّن، باید تعداد پارامترهای توصیف کننده‌ی لغزش را به نحوی تعیین کنیم که تعداد آنها کمتر از تعداد داده‌های مشاهده شده باشد. توجه کنید که این کار تضمین نمی‌کند که مسئله خوش‌وضع شود. داده‌های مشاهده شده اغلب مستقل از هم نیستند و این امر منجر به یک مسئله بدوضع دارای کمبود مرتبه می‌شود. به علاوه، این فرامعیّن بودن ظاهری فقط یک قاعده‌ی سرانگشتی[21] برای انتخاب تعداد توابع فازی است. کمبود مرتبه با استفاده از میرایی در روش منظم‌سازی تیخونوف کنترل می‌گردد [هنسن، ۲۰۰۵]. در بخش ۶-۵ به ارائه یک راه حل بهبود یافته جهت انتخاب تعداد توابع پایه‌ی فازی هر دسته داده با استفاده از تحلیل بیشینه‌ی درست‌نمایی[22] می‌پردازیم.

داده‌هایی که ما استفاده کرده‌ایم، دارای ۱۴۱ مشاهده در فرکانس Hz ۰، ۶۶ مشاهده در محدوده‌ی فرکانسی ما بین Hz ۰٫۰۳ تا Hz ۰٫۰۶ و ۵۹ مشاهده در محدوده‌ی فرکانسی بیش از Hz ۰٫۰۶ می‌باشد. در هر گام خطی از روش آموزش دوگانه، تعداد پارامترهایی که در جستجوی آن هستیم برابر با حاصلضرب تعداد توابع عضویت فازی در راستای امتداد (N_ξ) در تعداد توابع عضویت فازی در راستای شیب N_η است. برای توصیف تابع برداری لغزش در دو راستای امتداد u_s و بالا-شیب u_d، به دو تا از چنین سیستم‌هایی نیازمندیم. بنابراین در هر گام خطی حل، به تعداد $N_\eta \times N_\xi \times ۲$ پارامتر مدل داریم. اگر به تعداد $N_\xi = ۶$ و $N_\eta = ۴$ پارامتر مدل انتخاب کنیم، تعداد کل پارامترها برابر $N_\eta \times N_\xi \times ۲ = ۴۸$ برای به دست آوردن تابع چشمه در هر فرکانس خواهد شد که کمتر از ۵۹، کمترین تعداد نقاط مشاهداتی است و در نتیجه یک مسأله فرامعیّن را تشکیل می‌دهد.

[21] Rule of thumb
[22] Maximum Likelihood

هندسه‌ی گسل منطبق بر گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] انتخاب شده است، مقادیر زوایای امتداد برابر با 155° و شیب برابر 45° می‌باشد. چنانچه در بخش ۴-۳ اشاره کردیم، پارامتر منظم‌سازی α با استفاده از معیار بیشترین انحنای منحنی L-curve به دست می‌آید. شکل ۶-۲ منحنی‌های L-curve را در فرکانس‌های منتخب در محدوده‌ی فرکانسی $0/00 - 0/50$ Hz نشان می‌دهد. همچنان که در حل سینتتیک (بخش ۴-۴) دیدیم، نقطه‌ی دارای بیشینه انحنا در فرکانس‌های پایین ($f \leq 0/25$ Hz) به راحتی قابل شناسایی است. با این حال، در فرکانس‌های بالا ($f > 0/25$ Hz) انحنای منحنی‌های L-curve به طرز مشهودی کاهش می‌یابند و مقدار مناسبی برای پارامتر میرا کنند نمی‌توان یافت. این مهم نشان می‌دهد که در فرکانس‌های بالاتر، مدلسازی دقیقتری برای انتشار امواج باید صورت پذیرد تا تطابق میان داده‌ها مشاهده شده و میدان موج شبیه‌سازی شده بهتر شود. برای تحقق این مهم، می‌بایست داده‌های بیشتری در فرکانس‌های بالا به کار گرفته شوند و همچنین از مدل سرعتی-چگالی-میرایی دقیقتری استفاده گردد. با این حال، در روش پیشنهادی ما، این امکان وجود دارد که دقت مدلسازی مستقیم را با افزایش تعداد نقاط گاوسی (N_{gauss}) وافزایش داده و همزمان با کاهش فاصله‌ی میان نقاط منظم‌ساز Δx_r قید منظم‌ساز قوی‌تری بر مدل اعمال کنیم. شکل ۶-۲ نشان می‌دهد که با استفاده از مش ریزتر، نقطه‌ی بیشینه‌ی انحنا به شکل مناسبتری ظاهر گردیده است که این امر در فرکانس‌های بالا ($f > 0/25$ Hz) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چون استفاده از مش ریزتر، هزینه‌ی محاسباتی را افزایش می‌دهد، فقط برای فرکانس‌های بالا ($f > 0/25$ Hz) مناسب است. به این دلیل، در فرکانس‌های پایین ($f \leq 0/25$ Hz) از ۴ نقطه‌ی گاوسی در هر المان انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم و فاصله‌ی بین نقاط منظم‌ساز را ۱ km در نظر می‌گیریم. در فرکانس‌های بالاتر از ۰/۲۵ Hz، تعداد نقاط گاوسی را از ۴ به ۹ افزایش داده و فاصله‌ی بین نقاط منظم‌ساز را از ۱ km به ۰/۳ km کاهش می‌دهیم.

چنانچه نتوانیم مقدار پارامتر α را با استفاده از منحنی L-curve به دست بیاوریم و اطلاعاتی هم از خطای مدلسازی نداشته باشیم، می‌توانیم مقدار α را تا حد امکان نزدیک به مقادیر تکین بزرگ حل معکوس انتخاب کنیم. این انتخاب ممکن است موجب بیش-میرا شدن جواب بشود، یعنی در ازای پایدار شدن جواب، از تمامی اطلاعات موجود در داده‌ها استفاده نکنیم.



شکل ۶-۲: نمودارهای L-curve که برای تعیین پارامتر منظم‌ساز α به کار برده شده‌اند، در محدوده‌ی فرکانسی حل معکوس نشان داده شده است. در این شکل، نمودارهای L-curve در فرکانس صفر با استفاده از داده‌های جابجایی GNSS، در فرکانس ۰/۰۳ Hz و ۰/۰۶ Hz با استفاده از داده‌های نرخ‌بالای GNSS و در فرکانس‌های بیشتر از ۰/۰۶ Hz با داده‌های شتابنگاری به دست آمده است. دایره‌ی قرمز رنگ بر روی نمودارها، نقاط دارای بیشینه‌ی انحنا را نمایش می‌دهند که با استفاده از آنها پارامتر میرا کننده‌ی α را به دست آورده‌ایم. در فرکانس‌های بالا ($f > ۰/۲۵$ Hz)، انحنای منحنی L-curve کاهش می‌یابد. L-curveهای مبتنی بر شبکه بندی درشت نقاط ($N_{gauss} = ۴, \Delta x_r = ۱$km، خط قرمز) انحنای کمتری نسبت به منحنی مبتنی بر شبکه‌بندی ریز نقاط ($N_{gauss} = ۹, \Delta x_r = ۰/۳$km، خط آبی) نشان می‌دهد. به منظور افزایش انحنای منحنی‌های L-curve و در نتیجه بهبود کیفیت حل معکوس، در فرکانس‌های بالا از مش ریزتر استفاده کرده‌ایم.

جدول ۶-۲: پارامترهای مفروض هندسه‌ی گسل در حل معکوس. پارامترهای چشمه زمین‌لرزه‌ی ۲۰۱۶ آماتریچه بر مبنای چیارالوچی و همکاران [۲۰۱۷] انتخاب شده‌اند.

عرض جغرافیایی کانون	42.704 N
طول جغرافیایی کانون	13.251 E
زمان مبدأ	2016-08-24 01:36:32.702
زاویه‌ی امتداد	۱۵۵°
زاویه‌ی شیب	۴۵°
طول گسل	30 km
عرض گسل	14 km
عمق لبه‌ی بالایی گسل	0.00 km
عمق لبه‌ی پایینی گسل	9.89 km
ابعاد زیر گسل‌های انتگرال‌گیری	۲ × ۲ km
تعداد نقاط گاوسی (۰/۰۰ − ۰/۲۱۹ Hz)	۲ × ۲
تعداد نقاط گاوسی (۰/۲۵ − ۰/۵۰ Hz)	۳ × ۳
ابعاد مش منظم‌سازی (۰/۰۰ − ۰/۲۱۹ Hz)	۱ × ۱ km
ابعاد مش منظم‌سازی (۰/۲۵ − ۰/۵۰ Hz)	۰/۳ × ۰/۳ km
گام زمانی شکل موج‌ها (dt)	۰/۲۵ sec
گام فرکانسی طیف شکل‌موج‌ها (df)	۰/۰۳ Hz
تعداد دوره‌های آموزش	۲۰۰
نرخ آموزش (κ)	۰/۰۱
تعداد توابع پایه‌ی فازی در راستای امتداد گسل (N_ξ)	۶
تعداد توابع پایه‌ی فازی در راستای شیب گسل (N_η)	۴

۶-۴ نتایج

شکل ۶-۳ نتایج حل معکوس ما را بر روی داده‌های زمین‌لرزه‌ی آماتریچه نشان می‌دهد. در این شکل، توزیع مکانی لغزش در فرکانس‌های منتخب برای دو مؤلفه‌ی لغزش (در راستای امتداد گسل و در راستای بالا شیب) نشان داده شده است. همچنانکه برای یک زمین‌لرزه‌ی نرمال انتظار می‌رود، مولفه‌ی لغزش در راستای شیب گسل، دارای دامنه‌ی بیشتری نسبت به مولفه‌ی در راستای امتداد گسل است. ناحیه‌ای از لغزش در قسمت شمال-غربی (NW) کانون، به شکلی سازگار، در همه‌ی فرکانس‌ها تصویر شده‌اند. با توجه به این نکته که حل معکوس ما در هر فرکانس به صورت مستقل از فرکانس‌های دیگر انجام شده است، سازگاری لغزش در فرکانس‌های مختلف با یکدیگر، نشان‌دهنده‌ی کیفیت خوب حل معکوس است.

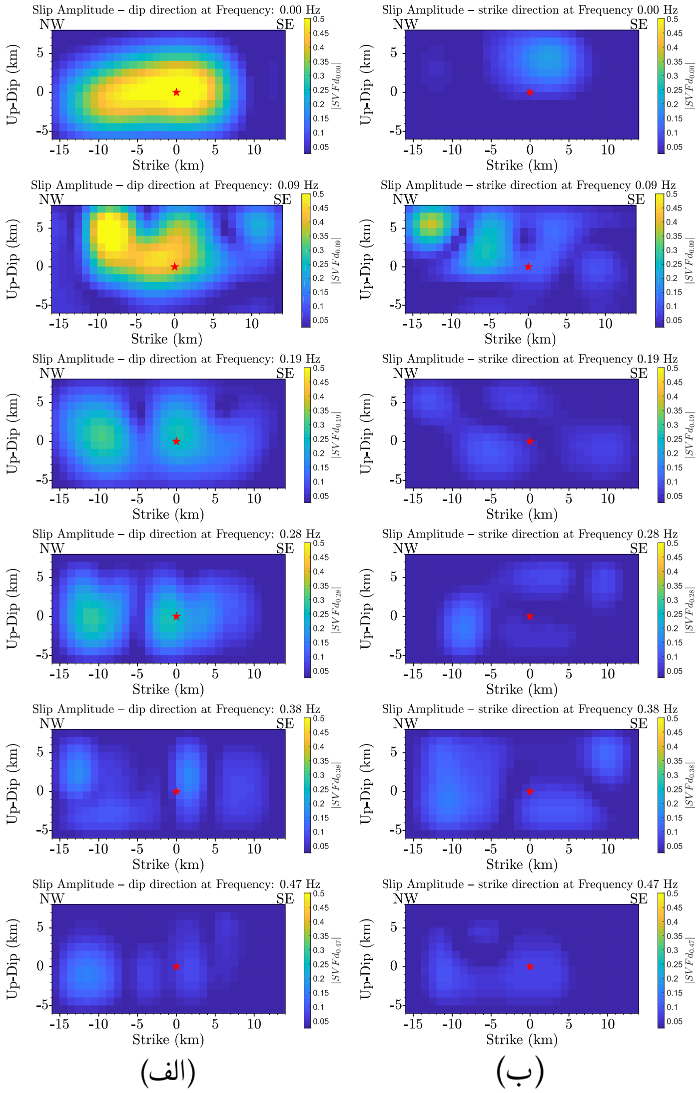
با استفاده از آنالیز فوریه می‌توان مقادیر مختلط تابع چشمه را به تابع نرخ لغزش در حوزه‌ی زمان تبدیل کرد. برای این منظور، تعدادی نقطه به نمایندگی نقاط واقع شده بر سطح گسل انتخاب کرده $(\xi_\circ, \eta_\circ)$ و با استفاده از روابط ۴-۱۸ و ۴-۱۹ مقدار لغزش در هر فرکانس حل را در آن نقاط می‌یابیم. سپس با استفاده از تبدیل معکوس فوریه، توابع نرخ لغزش را از روی طیف محاسبه شده در آن نقاط به دست می‌آوریم. شکل ۶-۴ نشان‌دهنده‌ی تابع چشمه‌ی به دست آمده از تقریب فازی در حوزه زمان است. در پس‌زمینه لغزش استاتیکی نمایش داده شده است، که میزان لغزش نهایی است که با استفاده از داده‌های استاتیکی GNSS به دست آمده است (مربع‌های رنگی پس‌زمینه در شکل ۶-۴). در هر یک از سلول‌های شکل ۶-۴(الف) توابع نرخ لغزش را در دو راستای شیب (سیاه) و امتداد (آبی) نشان داده‌ایم. شکل ۶-۴(ب) تابع نرخ لغزش را به صورت زوم شده، با خط چین، در یکی از نقاط واقع بر روی گسل نشان می‌دهد. چون سازوکار لغزش نرمال است، بردار نابجایی در راستای پایین-شیب[23] خواهد بود و نمودار نرخ لغزش در شکل ۶-۴(ب) در راستای پایین-شیب مثبت می‌باشد. به منظور جلوگیری از اثرات قطع فرکانسی در تبدیل معکوس فوریه، با استفاده از یک فیلتر کسینوسی، طیف توابع نرخ لغزش را کاسته‌ایم. توابع نرخ لغزش، نوسانات نامطلوبی را نشان می‌دهند و در آن‌ها مقدار کمی پس-لغزش[24] دیده می‌شود. این اثرات را در ادامه و در بخش ۶-۶-۲ مورد بحث قرار خواهیم داد. در بخش بعدی روش دیگری را معرفی خواهیم کرد که با استفاده از آن می‌توان دقت حل معکوس را افزایش داد.

شکل ۶-۵ دامنه‌ی سرعت لغزش را در گام‌های زمانی متوالی به صورت مجموعه عکس‌هایی از فرآیند لغزش نمایش می‌دهد. دامنه‌ی لغزش از حاصل جمع برداری مولفه‌های لغزش در راستای امتداد و بالا-شیب گسل به

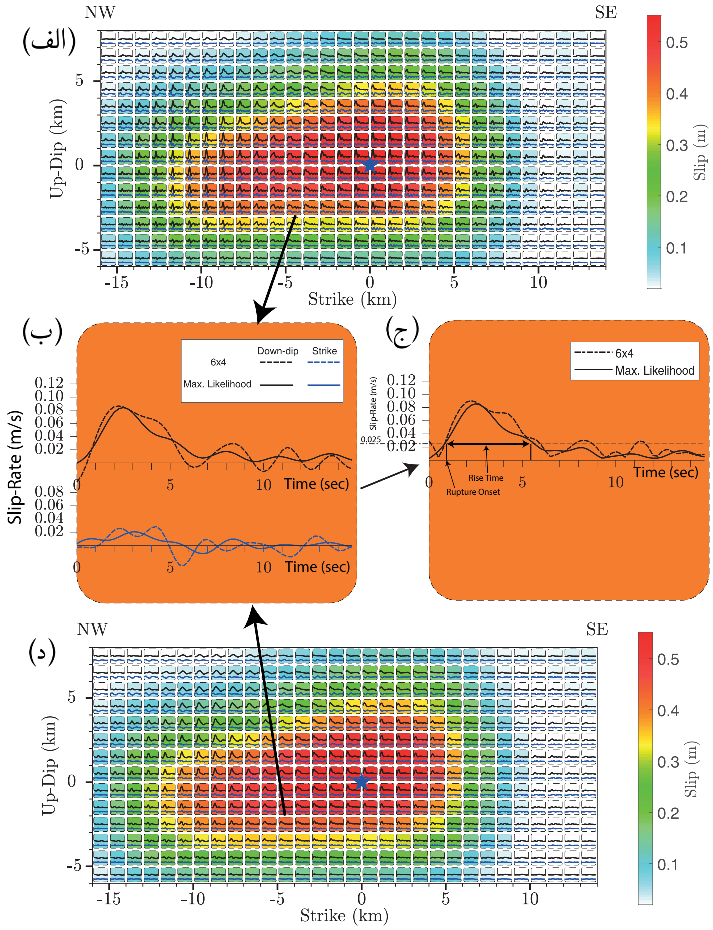
[23] Down-dip
[24] Back-slip

دست آمده است، یعنی $\sqrt{u_s(\xi,\eta,t)^۲+u_d(\xi,\eta,t)^۲}$. برای آنکه لغزش به صورت مشخص‌تری نشان داده شود، در شکل ۶-۵ مقادیر لغزش بیشتر از ۰/۲۵ m/s نشان داده شده‌اند. مدل به دست آمده بیانگر آن است که لغزش از اعماق کم شروع شده و تا حدود ۲ ثانیه به آرامی رشد می‌کند. پس از آن، لغزش به صورت دوسویه[25]، به دو سمت شمال غربی (NW) و جنوب شرقی (SE) و با سرعتی بیشتر در سمت (NW) حرکت می‌کند. مشخصات لغزش به دست آمده با جزئیات بیشتر در بخش ۶-۶ مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۶-۶ مقایسه‌ی میان شکل‌موج‌های شبیه‌سازی شده و ثبت شده را در حوزه‌ی زمان نشان می‌دهد. ترتیب نمایش شکل‌موج‌ها بر اساس فاصله‌ی آنها از کانون زمین‌لرزه می‌باشد. اگرچه فازهای رسید موج و دامنه‌ی امواج در رکوردهای شبیه‌سازی شده به نحو رضایت بخشی تقریب زده شده‌اند، در بعضی ایستگاه‌های دور (نظیر ASP، SPM و TRE) داده‌های شبیه‌سازی شده نتوانسته‌اند به طور مناسبی داده‌های مشاهده شده را بازسازی کنند. در شکل ۶-۷ مقایسه میان طیف فرکانسی رکوردهای مشاهده شده و شبیه‌سازی صورت گرفته است. مقایسه‌ی میان تغییر مکان‌های استاتیکی (۰ Hz) شبیه‌سازی شده و مشاهده شده در شکل ۶-۸ نمایش داده شده است. در بخش بعدی، روشی مبتنی بر تحلیل بیشینه‌ی درست‌نمایی انجام خواهیم داد که به شیوه‌ی مناسبتری می‌تواند اطلاعات مدل را از داده‌های موجود به دست بیاورد.

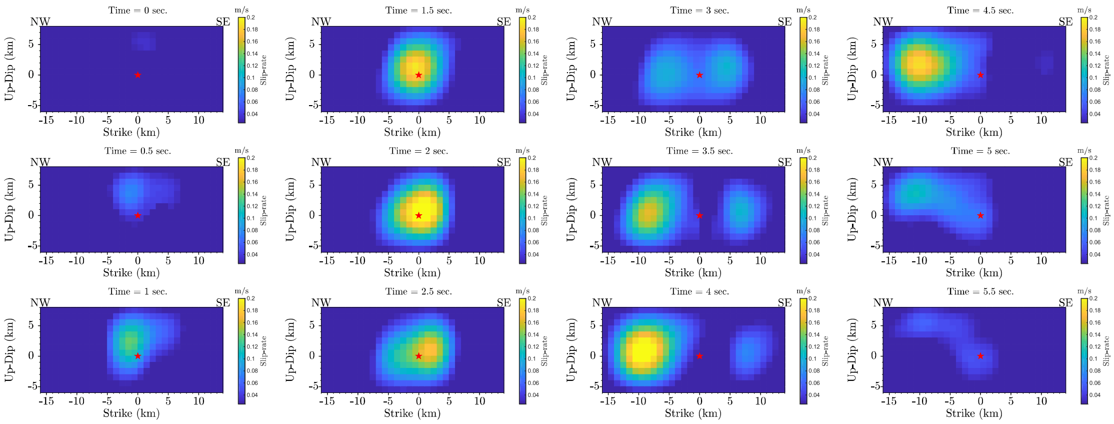
[25] Bilateral



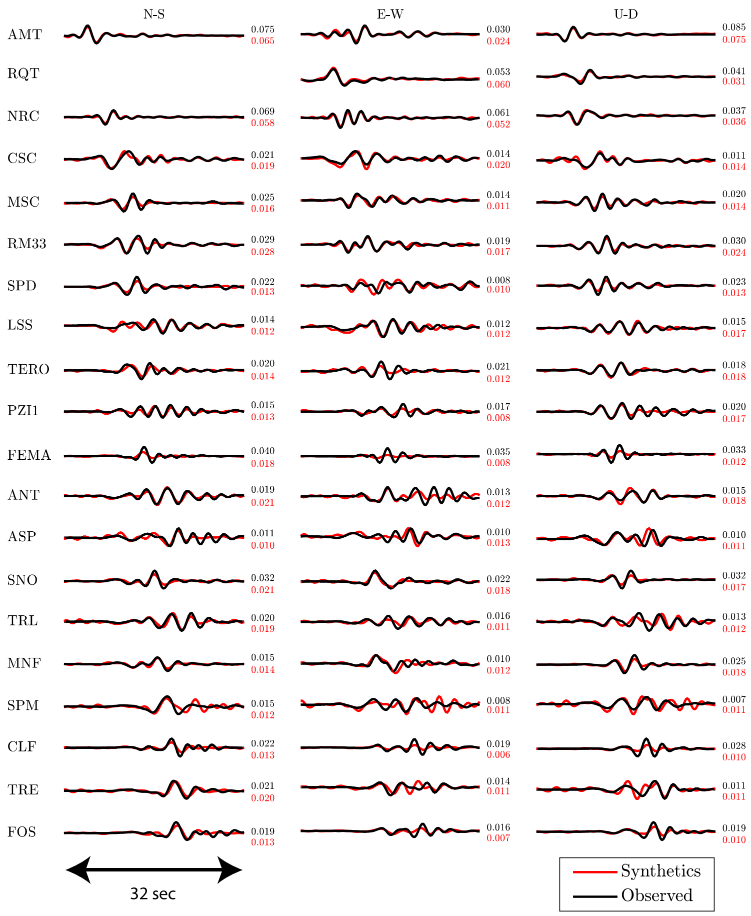
شکل ۶-۳: مقادیر طیفی توابع چشمه‌ی به دست آمده از حل معکوس نوروفازی (الف) در راستای بالا-شیب، (ب) در راستای امتداد، در فرکانس‌های منتخب. توابع چشمه‌ی طیفی دارای دامنه‌ی بیشتری در راستای بالاشیب، نسبت به راستای امتداد هستند که نشان می‌دهد گسلش بیشتر نرمال بوده است. ناحیه‌ی اسپریتی در اکثر شکل‌ها در یک محدوده قرار گرفته است که تایید کننده مناسب بودن حل است.



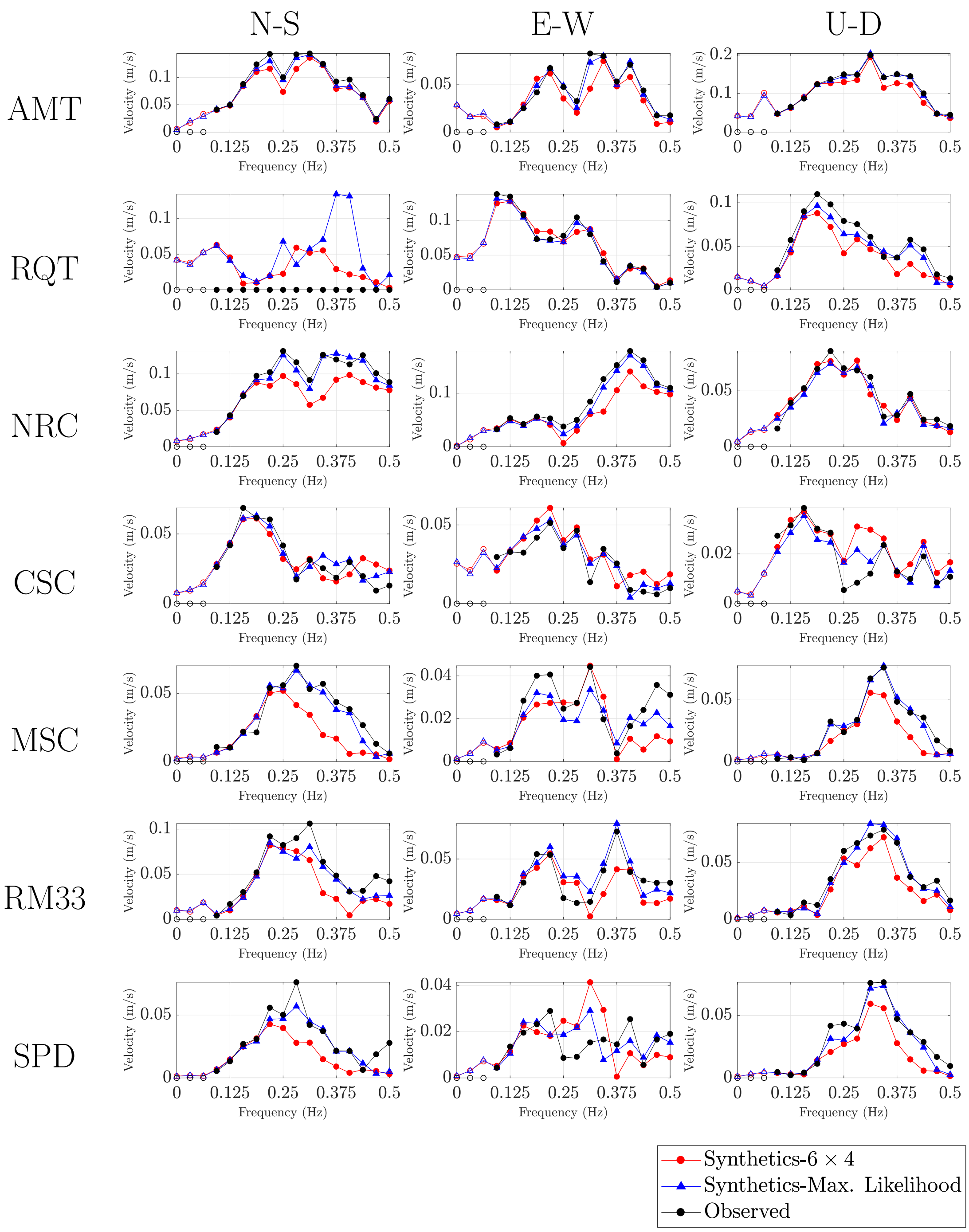
شکل ۶-۴: تابع چشمه‌ی سینمانیکی به دست آمده از روش حل معکوس نوروفازی برای زمین‌لرزه‌ی آماتریچه، نشان داده شده بر روی سلول‌هایی با ابعاد $1\text{km}^{2} \times 1$. (الف) تعداد توابع پایه با استفاده قاعده‌ی سرانگشتی ارائه شده در بخش ۶-۳ تعیین شده‌اند، که بطور ساده یک مسئله‌ی فرامعیّن را تشکیل می‌دهد. تصویر پس‌زمینه، لغزش استاتیکی (0 Hz) را نشان می‌دهد که برابر با مساحت زیر سطح نمودار نرخ لغزش در هر سلول است و با استفاده از داده‌های استاتیکی GNSS به دست آمده است. ستاره‌ی آبی تصویر محل کانون چیارالوچی و همکاران [۲۰۱۷] است. (ب) تصویر زوم شده از یکی از سلول‌های نشان داده شده‌ی گسل، نشان‌دهنده‌ی لغزش به دست آمده توسط هر دو روش بیشینه‌ی درست‌نمایی (خط پُر) و روش فرامعیّن (خط چین). توجه کنید، چون ساز و کار کانونی نُرمال است، مؤلفه‌ی در راستای شیب به سمت پائین-شیب می‌لغزد، به این دلیل تابع نرخ لغزش (خط سیاه) به گونه‌ای ترسیم شده است که راستای پایین-شیب، جهت مثبت باشد. (ج) دامنه‌ی لغزش که با استفاده از جمع برداری لغزش در دو راستای امتداد و شیب $\sqrt{u_s(\xi,\eta,t)^{2}+u_d(\xi,\eta,t)^{2}}$ به دست آمده‌اند. (د) لغزش به دست آمده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی، لغزش نهایی در پس‌زمینه رسم شده است. توابع نرخ لغزش در نقاط منتخب ترسیم در راستای شیب (سیاه) و امتداد (آبی) ترسیم شده است.

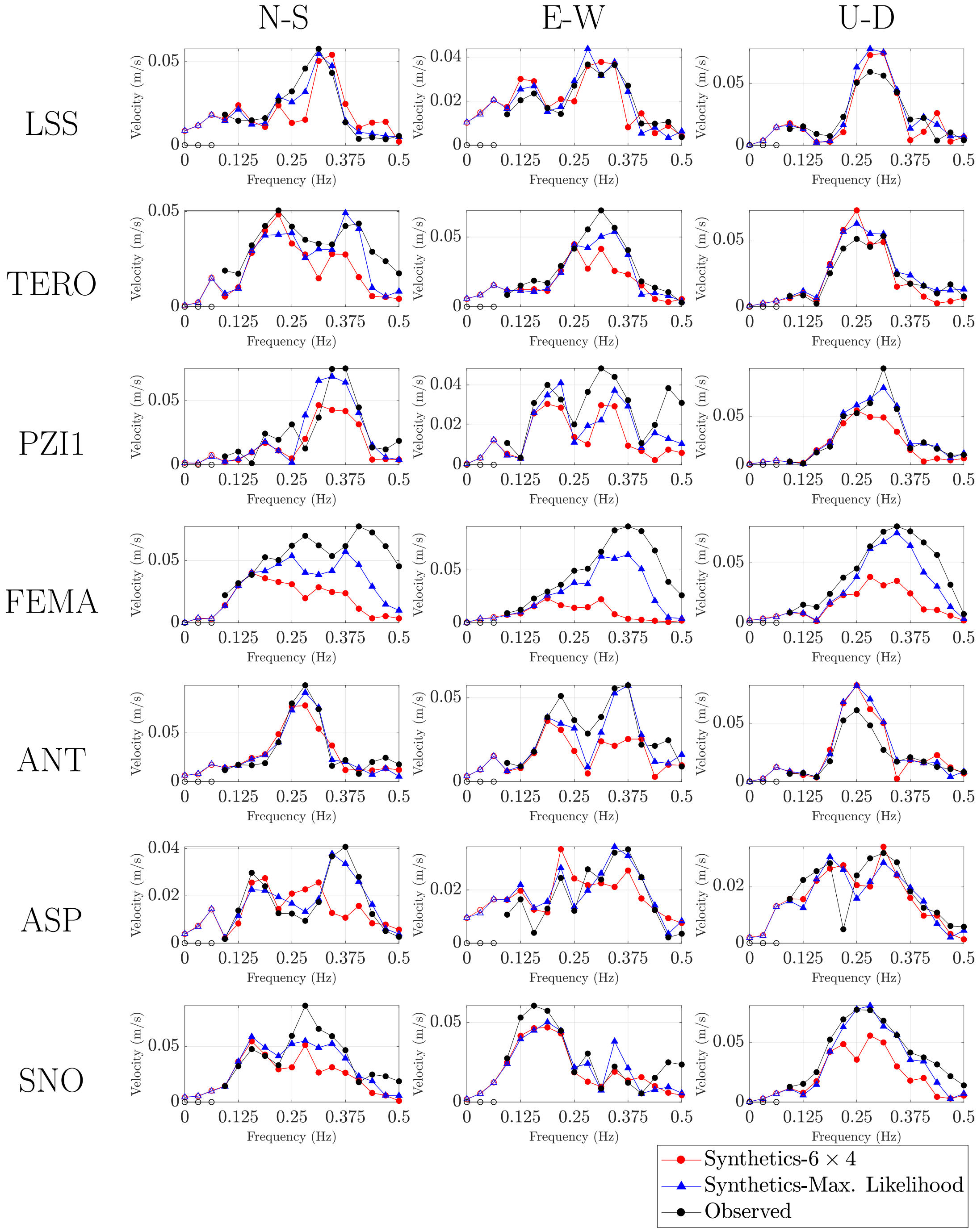


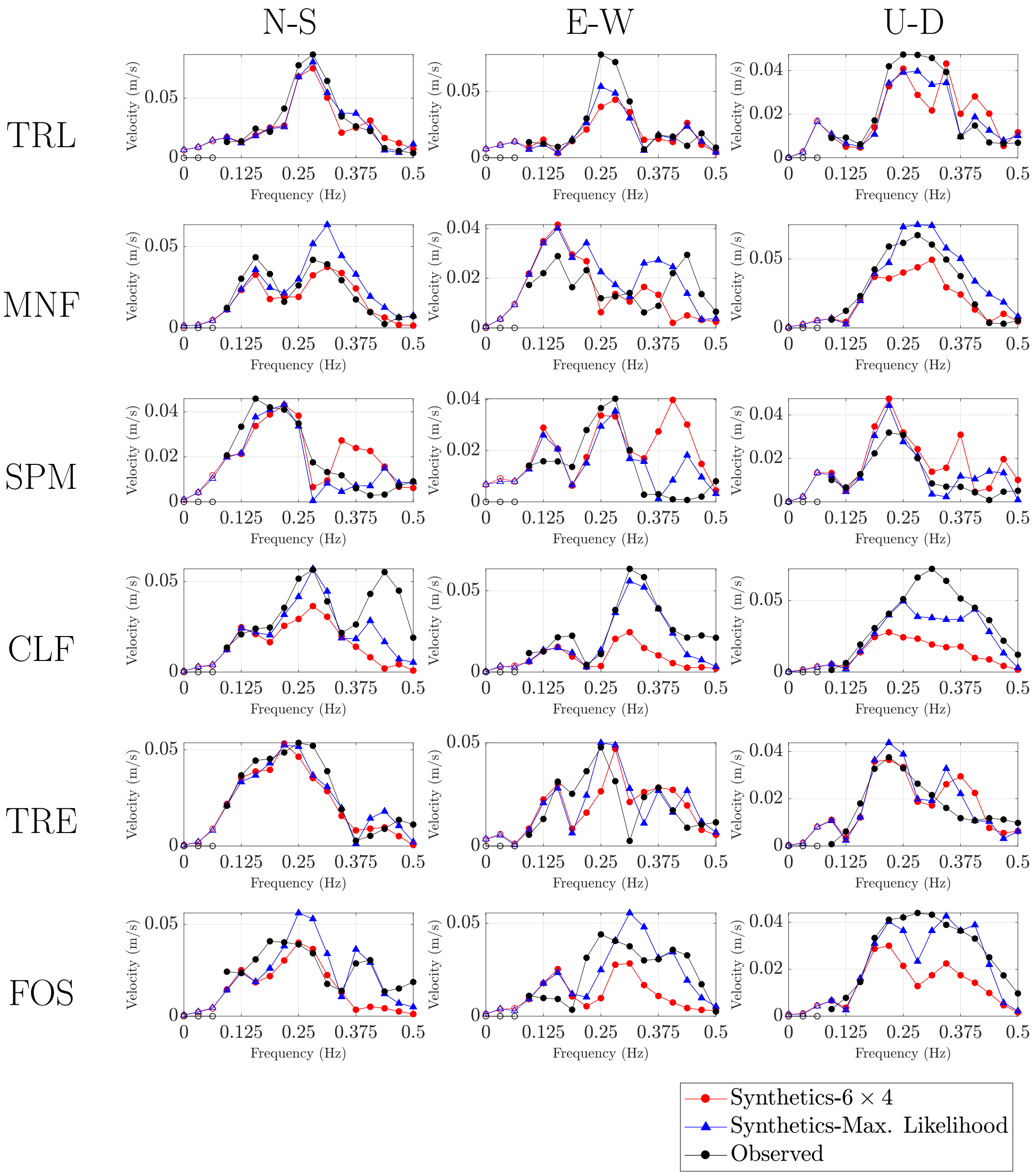
شکل ۶-۵: توابع نرخ لغزش، ترسیم شده در گام‌های ۰٫۵ ثانیه. گسیختگی از نزدیکی کانون آغاز می‌شود و به شکل دو سویه منتشر می‌شود. ستاره‌ی قرمز رنگ تصویر کانون چیارالوچی و همکاران [۲۰۱۷] را بر روی گسل نشان می‌دهد. توابع نرخ لغزش هر نقطه در شکل ۶-۴(الف) نشان داده شده است.



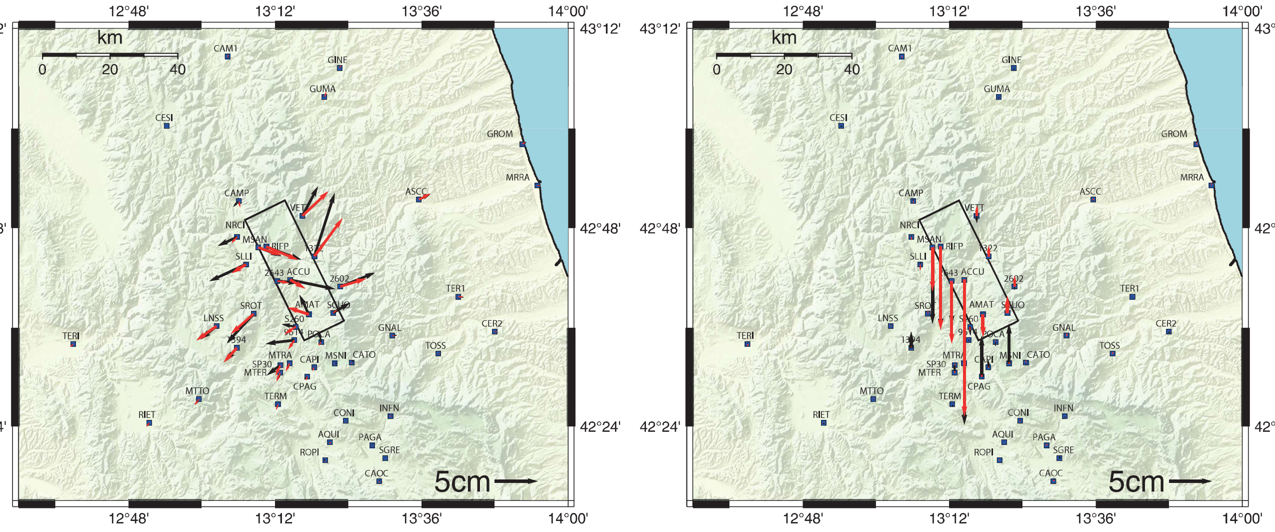
شکل ۶-۶: مقایسه میان سری‌های زمانی سرعت در ایستگاه‌های جنبش نیرومند. شکل موج‌های مشاهده شده با رنگ سیاه و شکل موج‌های شبیه‌سازی شده با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند. تعداد توابع پایه‌ی فازی که برای حل معکوس استفاده شده‌اند از روش فرامعیّن (بخش ۶-۳) تعیین شده‌اند. بیشینه‌ی دامنه‌ی شکل موج (m/s) در مقابل هر مؤلفه نوشته شده است. هر دو شکل موج در محدوده‌ی فرکانسی حل با استفاده از داده‌های شتابنگاری (۰٫۰۶ − ۰٫۵۰Hz) فیلتر شده‌اند.


N-S
E-W
U-D
AMT
RQT
NRC
CSC
MSC
RM33
SPD
Velocity (m/s)
Frequency (Hz)
Synthetics-6 × 4
Synthetics-Max. Likelihood
Observed


N-S
E-W
U-D
LSS
TERO
PZI1
FEMA
ANT
ASP
SNO
Velocity (m/s)
Frequency (Hz)
Synthetics-6 × 4
Synthetics-Max. Likelihood
Observed



شکل ۶-۷: مقایسه میان دامنه‌ی طیفی داده‌های جنبش نیرومند مشاهده شده، و شبیه‌سازی شده توسط معیار فرامعیّن بودن مسئله (۴ × ۶) تشریح شده در بخش ۶-۳. دایره‌های توپر، فرکانس‌هایی که در حل استفاده شده‌اند را نشان می‌دهد. سه دایره‌ی تو خالی از حل مستقیم مدل لغزش به دست آمده از داده‌های GNSS به دست آمده‌اند.



(الف)

(ب)

شکل ۶-۸:   مقایسه میان تغییر مکان استاتیکی مشاهده شده بر روی زمین (فلش‌های مشکی) و شبیه‌سازی شده (فلش‌های قرمز) در دو امتداد (الف) افقی (شمالی-جنوبی)، و (ب) قائم (مثبت رو به بالا) مدلسازی شده با استفاده از فرض فرامعیّن (۴ × ۶) ارائه شده در بخش ۶-۳.

۶-۵ روش بیشینه‌ی درست‌نمایی برای انتخاب تعداد توابع فازی

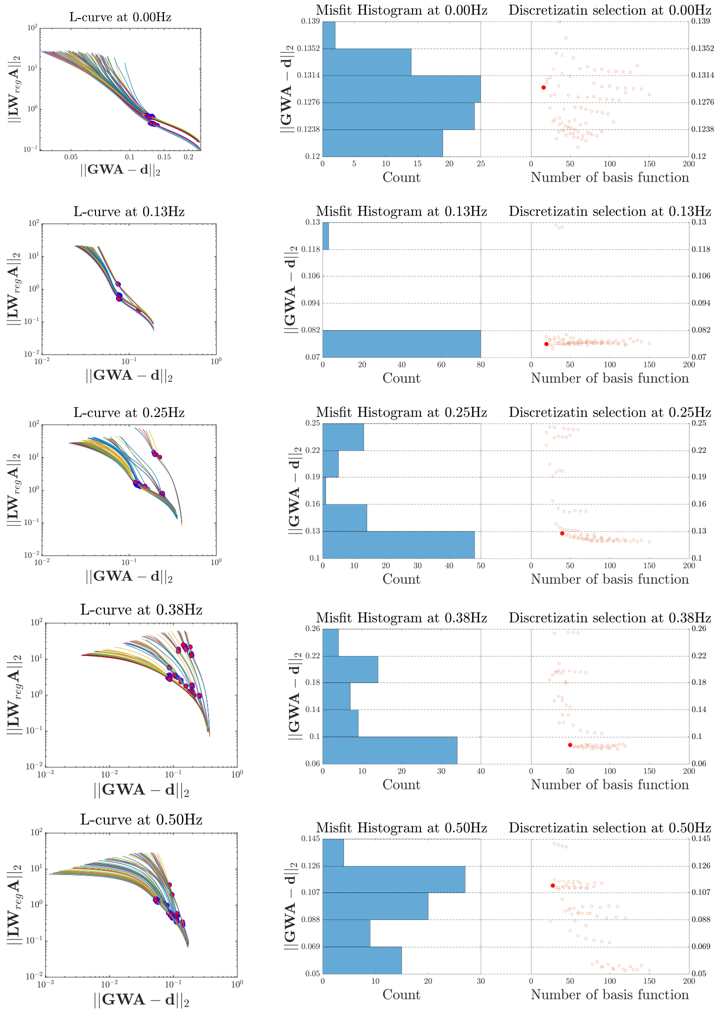
در فصل ۵ نشان دادیم که روش حل معکوس نوروفازی پیشنهادی امکان کاهش تعداد پارامترهای مدل را داده، لذا موجب کاهش تعداد مقادیر تکین کوچک شده و به حل معکوس پایدارتری منجر می‌شود. بر این اساس، حُسن این روش این است که با کاهش تعداد توابع پایه هم می‌توانیم فرایند گسیختگی را به خوبی به دست بیاوریم. در بخش قبلی با استفاده انتخاب پارامترها به نحوی که گام خطی روش آموزش دوگانه فرامعیّن شود، با انتخاب (۴×۶) تابع پایه، مدل لغزش را تعیین کردیم. در این بخش می‌خواهیم با استفاده از معیار مناسب‌تر بیشینه‌ی درست‌نمایی برای انتخاب تعداد توابع پایه‌ی فازی استفاده کنیم.

برای آنکه درک بهتری از تأثیر تغییر تعداد توابع پایه پیدا کنیم، تعداد تقسیم‌بندی‌های متنوعی را با استفاده توابع عضویت فازی، از ۴×۴ تا ۱۰×۱۵ بررسی کرده‌ایم. تعداد نقاط انتگرال‌گیری و فاصله‌ی مش منظم‌سازی همانند جدول ۶-۲ در نظر گرفته شده است. شکل ۶-۹ منحنی‌های L-curve را برای حل معکوس‌های مختلف نشان می‌دهد. دایره‌ی قرمز نقطه‌ی دارای بیشینه‌ی انحنا را نشان می‌دهد. تغییر در تعداد توابع پایه‌ی فازی تأثیر محسوسی بر انتخاب ضریب میرایی α دارد و از همین روی مقدار خطای باقیمانده را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

نُرم خطای باقیمانده، $\|\mathbf{GWA} - \mathbf{d}\|_۲$، در نقطه بیشینه‌ی انحنا را می‌توان به عنوان تقریبی (حدسی) از میزان نوفه (عدم قطعیت) که در داده‌ها وجود دارد، در نظر گرفت [هنسن، ۲۰۰۵، صفحه‌ی ۸۴]. شکل ۶-۹(ب) هیستوگرام نُرم خطای باقیمانده را که از حل معکوس‌های مختلف با تعداد توابع پایه‌ی متفاوت به دست آمده است را نشان می‌دهد. در این هیستوگرام، دسته‌ای را که دارای بیشترین تعداد حل‌هاست را به عنوان دسته‌ی دارای بیشینه‌ی درست‌نمایی در نظر می‌گیریم. شکل ۶-۹ مقدار خطای تقریب زده شده را در مقابل تعداد توابع پایه نشان می‌دهد. تعداد توابع پایه‌ی مورد نیاز بر اساس کمترین تعداد توابع فازی در دسته‌ی دارای بیشترین درست‌نمایی انتخاب می‌گردد. در جدول ۶-۳، تعداد توابعی که از روش بیشینه درست‌نمایی در هر فرکانس به دست آمده‌اند، درج شده است. در حالت کلی، تعداد توابع پایه‌ای که از این روش به دست می‌آیند، با افزایش فرکانس افزایش می‌یابند. علاوه بر این، شکل ۶-۹(ب) میزان پراکندگی عدم قطعیتی که با حل با کمک توابع فازی مختلف به دست آمده است را نشان می‌دهد. هیستوگرام در فرکانس‌های پایین دارای پراکندگی کمتری نسبت به فرکانس‌های بالاست، این امر نشان می‌دهد که در فرکانس‌های پایین استفاده از تعداد توابع پایه‌ی زیاد و یا کم تأثیر زیادی بر تقریب داده‌ها ندارد. با این حال، در فرکانس‌های بالا، به توابع پایه‌ی بیشتری نیاز داریم تا در دسته‌ی با بیشینه‌ی درست‌نمایی قرار گرفته و اطلاعات کافی در مورد چشمه را از داده‌ها استخراج نمائیم.

شکل ۶-۱۰ توزیع به دست آمده‌ی مکانی لغزش را در دو حالت: (الف) ۴ × ۶ یا همان روش فرامعیّن در بخش ۶-۳ (ب) تعداد متغیّر توابع پایه در هر فرکانس، به دست آمده با استفاده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی نشان می‌دهد. در فرکانس‌های پائین نتایج دو روش تقریباً شبیه به یکدیگر است، حال آنکه در فرکانس‌های بالا $f >$ ۰٫۲۵Hz، روش بیشینه‌ی درست‌نمایی به دلیل استفاده از توابع پایه‌ی بیشتر قادر است جزئیات بیشتری از لغزش فراهم نماید. از سوی دیگر، این جزئیات بیشتر موجب تطابق بیشتر با داده‌های آموزشی شده است.

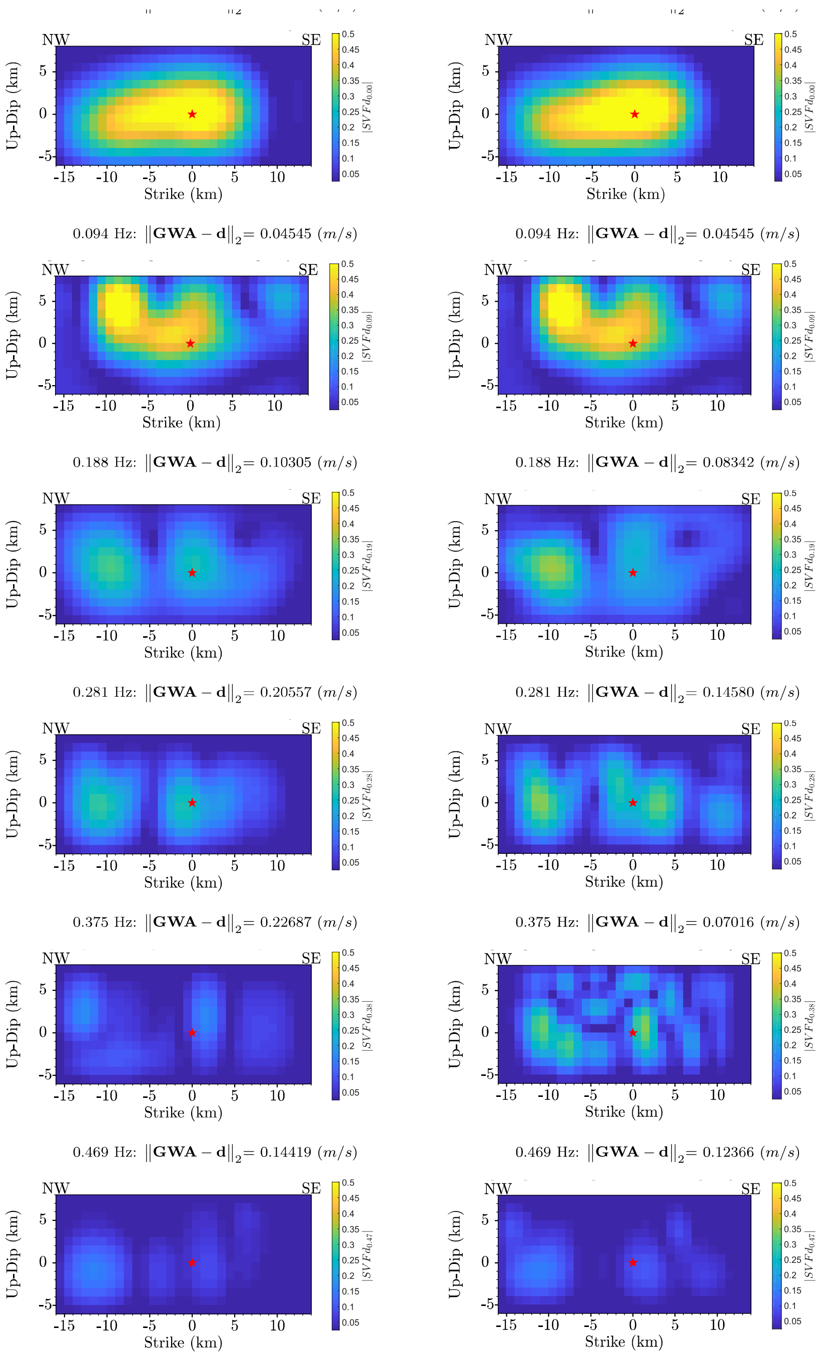
شکل ۶-۴(د) تابع لغزش به دست آمده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی را نشان می‌دهد. مقایسه میان شکل ۶-۴(الف) و ۶-۴(د) لغزش نهایی تقریباً یکسانی را از حل با دو روش نشان می‌دهد. با این حال لغزش به دست آمده از روش حدأکثر درست نمایی (۶-۴(ب و ج)-خط توپر) دارای نوسانات کمتری است، این امر نشان‌دهنده‌ی جواب سازگار تر در فرکانس‌های بالاست. شکل ۶-۱۱ سری‌های زمانی مشاهده شده (سیاه) و شبیه‌سازی شده (قرمز) را در ایستگاه‌های جنبش نیرومند (شکل ۶-۱) را نشان می‌دهد. هر دو سری زمانی در محدوده‌ی فرکانسی ۰٫۰۶ − ۰٫۵Hz فیلتر شده‌اند. شکل ۶-۷ مقایسه میان طیف داده‌های مشاهده شده و شبیه‌سازی شده را نشان می‌دهد. تغییر مکان استاتیکی سطح زمین در ایستگاه‌های استاتیکی GNSS در شکل ۶-۱۲ نشان داده شده است. مقایسه میان داده‌های شبیه‌سازی شده با روش فرامعیّن (شکل ۶-۶) و روش بیشینه‌ی درست‌نمایی نشان می‌دهد که روش اخیر به روش مناسب‌تری می‌توان دامنه‌ی امواج و فازهای رسید را بازسازی کند، علاوه بر این در روش بیشینه‌ی درست‌نمایی جنبش نیرومند در ایستگاه‌های دورتر، بهتر بازسازی شده‌اند.



شکل ۶-۹: روش بیشینه‌ی درست‌نمایی برای انتخاب تعداد مناسب توابع پایه‌ی فازی. (الف) منحنی‌های L-curve به دست آمده از ۸۴ فرض مختلف برای تعداد توابع پایه‌ی فازی که بین ۴ × ۴ تا ۱۰ × ۱۵ تغییر می‌کنند. دایره‌های قرمز نقاط دارای بیشینه‌ی انحنا را مشخص کرده‌اند. فرض کرده‌ایم که مقدار نُرم باقیمانده در نقطه‌ی حداکثر انحنا (محور افقی) تخمین مناسبی از مقدار عدم قطعیت (نوفه) را در هر حل معکوس نشان می‌دهد. (ب) هیستوگرام مقادیر باقیمانده در نقطه‌ی بیشینه‌ی انحنا، با در نظر گرفتن تمامی حل‌های معکوس با تعداد توابع پایه‌ی متفاوت. مقدار نُرم باقیمانده در دسته‌ی دارای بیشترین جمعیت، به عنوان مقدار عدم قطعیت دارای بیشینه درست‌نمایی در نظر گرفته می‌شود. (ج) دایره‌ها نشان‌دهنده‌ی عدم قطعیت (محور قائم) در حل معکوس با استفاده از تعداد متغیر توابع پایه (محور افقی) می‌باشند. خط چین‌های افقی مرز میان دسته‌های مختلف هیستوگرام را نمایش می‌دهند. دایره‌ی قرمز تعداد مناسب تقسیم‌بندی‌ها را نمایش می‌دهد. این دایره مربوط به کمترین تعداد تقسیم‌بندی‌ها در دسته‌ی دارای بیشترین درست‌نمایی است.

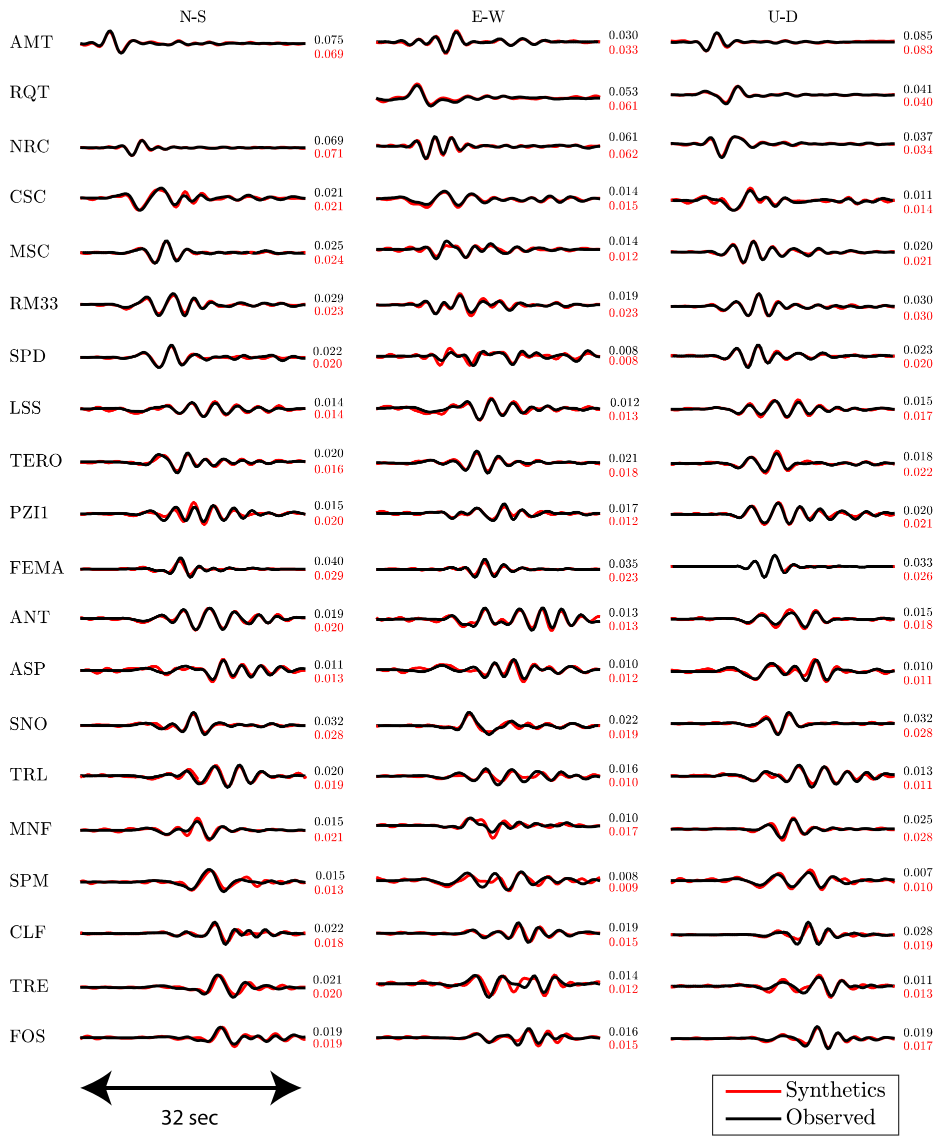
جدول ۶-۳: تعداد توابع پایه‌ی انتخاب شده در فرکانس‌های مختلف. در فرکانس‌های بالاتر، به توابع پایه‌ی بیشتری جهت دستیابی به خطای دارای بیشینه‌ی درست‌نمایی نیاز داریم. خطوط دوتایی حل معکوس با مجموعه داده‌های مختلف را از هم جدا می‌کنند (GNSS استاتیکی، HR-GNSS، و جنبش نیرومند). نُرم باقیمانده $\|\mathbf{GWA}-\mathbf{d}\|_2$ در گام اول و گام نهایی آموزش درج شده است. هنگامی که تعداد توابع پایه با استفاده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی تعیین می‌شوند، تقریباً در اکثر فرکانس‌ها، مقدار نُرم باقیمانده کمتر از روش سرانگشتی فرامعیّن بودن حل است. نُرم باقیمانده میان داده‌های صحت‌سنجی (HR-GNSS) و شبیه‌سازی شده در دو شیوه‌ی تعیین تعداد پارامترها تقریباً برابر است.

فرکانس (Hz)	تعداد توابع پایه‌ی فازی منتخب	بیشینه‌ی درست‌نمایی: نُرم خطای باقیمانده $[m/s]$		روش فرامعیّن (۴ × ۶)	داده‌های صحت‌سنجی (GNSS): نُرم خطای باقیمانده $[m/s]$	
	Total: $(N_\xi \times N_\eta)$	دوره‌ی اول آموزش (شکل ۶-۹(ج))	دوره‌ی آخر آموزش	نُرم خطای باقیمانده در گام نهایی $[m/s]$	بیشینه درست‌نمایی	فرامعیّن (۴ × ۶)
۰٫۰۰۰	۱۶(۴ × ۴)	۰٫۱۲۹۷۲	۰٫۱۱۷۹۰	۰٫۱۱۸۵۰	–	–
۰٫۰۳۱	۳۲(۸ × ۴)	۰٫۰۸۸۰۸	۰٫۰۸۶۸۴	۰٫۰۸۷۷۰	–	–
۰٫۰۶۳	۱۶(۴ × ۴)	۰٫۱۰۸۹۹	۰٫۱۰۲۶۴	۰٫۰۹۸۵۰	–	–
۰٫۰۹۴	۲۴(۶ × ۴)	۰٫۰۵۱۰۵	۰٫۰۴۵۴۵	۰٫۰۴۵۴۵	۰٫۱۳۶۷۶	۰٫۱۳۶۷۶
۰٫۱۲۵	۲۰(۴ × ۵)	۰٫۰۷۶۰۱	۰٫۰۶۵۳۲	۰٫۰۷۲۲۲	۰٫۱۵۸۱۱	۰٫۱۵۷۹۷
۰٫۱۵۶	۱۶(۴ × ۴)	۰٫۰۸۴۶۹	۰٫۰۷۲۷۱	۰٫۰۷۸۴۷	۰٫۲۱۸۴۷	۰٫۲۱۹۱۴
۰٫۱۸۸	۷۲(۱۲ × ۶)	۰٫۰۹۱۸۶	۰٫۰۸۳۴۲	۰٫۱۰۳۰۵	۰٫۲۶۰۴۳	۰٫۲۶۱۱۱
۰٫۲۱۹	۲۸(۷ × ۴)	۰٫۱۱۵۹۱	۰٫۱۰۲۷۴	۰٫۱۴۹۱۱	۰٫۳۱۸۲۱	۰٫۳۱۶۹۵
۰٫۲۵۰	۴۰(۸ × ۵)	۰٫۱۲۸۰۴	۰٫۱۱۴۹۸	۰٫۱۸۳۸۴	۰٫۳۶۲۴۳	۰٫۳۵۴۰۱
۰٫۲۸۱	۴۰(۱۰ × ۴)	۰٫۱۵۸۶۹	۰٫۱۴۵۸۰	۰٫۲۰۵۵۷	۰٫۳۹۰۲۸	۰٫۳۵۵۸۴
۰٫۳۱۳	۴۰(۱۰ × ۴)	۰٫۱۳۸۳۶	۰٫۱۲۳۷۵	۰٫۲۱۶۷۴	۰٫۴۷۰۸۹	۰٫۴۶۳۱۰
۰٫۳۴۴	۵۰(۱۰ × ۵)	۰٫۱۰۵۹۸	۰٫۰۹۰۱۴	۰٫۲۲۷۵۷	۰٫۴۸۲۰۲	۰٫۴۹۴۵۷
۰٫۳۷۵	۵۰(۱۰ × ۵)	۰٫۰۸۸۲۴	۰٫۰۷۰۱۶	۰٫۲۲۶۸۷	۰٫۵۵۶۹۲	۰٫۵۰۹۲۰
۰٫۴۰۶	۵۰(۱۰ × ۵)	۰٫۱۱۵۰۷	۰٫۰۹۰۶۷	۰٫۲۰۷۳۸	۰٫۴۴۱۹۷	۰٫۴۳۸۹۸
۰٫۴۳۸	۴۴(۱۱ × ۴)	۰٫۱۵۲۰۴	۰٫۱۳۱۷۷	۰٫۲۰۰۰۶	۰٫۵۹۰۰۶	۰٫۶۲۶۸۷
۰٫۴۶۹	۳۲(۸ × ۴)	۰٫۱۴۲۶۴	۰٫۱۲۳۶۶	۰٫۱۴۴۱۹	۰٫۵۰۶۲۲	۰٫۵۱۲۶۱
۰٫۵۰۰	۲۸(۷ × ۴)	۰٫۱۱۲۱۴	۰٫۰۹۲۳۵	۰٫۱۰۸۷۵	۰٫۳۹۳۴۴	۰٫۳۹۵۰۶

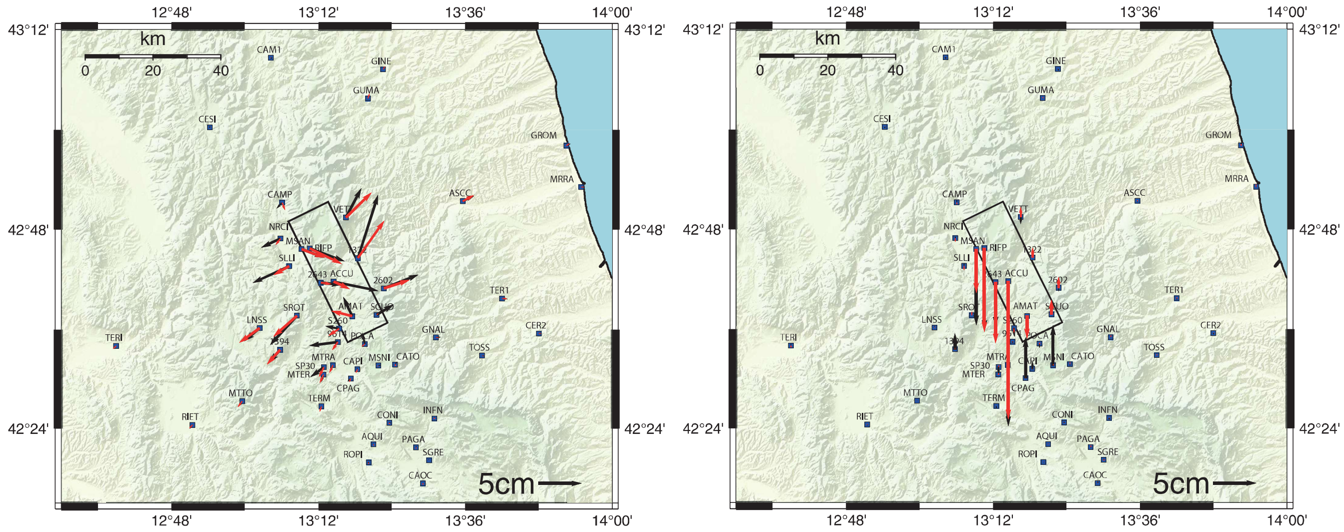


(الف) (ب)

شکل ۶-۱۰: مقایسه لغزش در امتداد بالا-شیب در فرکانس‌های منتخب. (الف) لغزش به دست آمده از انتخاب ۴×۶ تابع پایه، مطابق با معیار فرامعیّن بودن مسئله، تشریح شده در بخش ۶-۳ و (ب) مدل لغزش به دست آمده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی، تشریح شده در بخش ۶-۵. لغزش به دست آمده در فرکانس‌های پایین، مدل‌های یکسانی را نشان می‌دهند، حال آنکه در فرکانس‌های بالا روش بیشینه‌ی درست‌نمایی، چون از تعداد بیشتری توابع پایه استفاده می‌کند جزئیات بیشتری را هم نشان می‌دهد.



شکل ۶-۱۱: مقایسه میان سری‌های زمانی سرعت در ایستگاه‌های جنبش نیرومند. شکل موج‌های مشاهده شده با رنگ سیاه و شکل موج‌های شبیه‌سازی شده با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند. تعداد توابع پایه‌ی فازی که برای حل معکوس استفاده شده‌اند از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی (بخش ۶-۵) تعیین شده‌اند. بیشینه‌ی دامنه‌ی شکل موج (m/s) در مقابل هر مؤلفه نوشته شده است. هر دو شکل موج در محدوده‌ی فرکانسی حل با استفاده از داده‌های شتابنگاری ($0/05 - 0/5$Hz) فیلتر شده‌اند.



(الف) (ب)

شکل ۶-۱۲: مقایسه میان تغییر مکان استاتیکی مشاهده شده بر روی زمین (فلش‌های مشکی) و شبیه‌سازی شده (فلش‌های قرمز) در دو امتداد (الف) افقی (شمالی-جنوبی)، و (ب) قائم (مثبت رو به بالا) مدلسازی شده با استفاده از معیار بیشینه‌ی درست‌نمایی ارائه شده در بخش ۶-۵.

۶-۶ بحث و بررسی درباره‌ی مدل لغزش

در این بخش به بررسی مدل لغزشی که به دست آورده‌ایم خواهیم پرداخت و نتایج به دست آمده را با نتایج مطالعات سایر محققین (بخش ۶-۶-۱) مقایسه خواهیم کرد. مختصری در مورد اثر پس‌لغزش در مدل به آمده توضیح خواهیم داد (بخش ۶-۶-۲)، روش‌هایی که برای انتخاب تعداد توابع پایه به کار برده‌ایم رو بررسی خواهیم کرد (بخش ۶-۶-۳) و در نهایت به صحت سنجی داده‌ها در ایستگاه‌هایی خواهیم پرداخت که داده‌های آنها را در حل معکوس به کار نبرده‌ایم (بخش ۶-۶-۴).

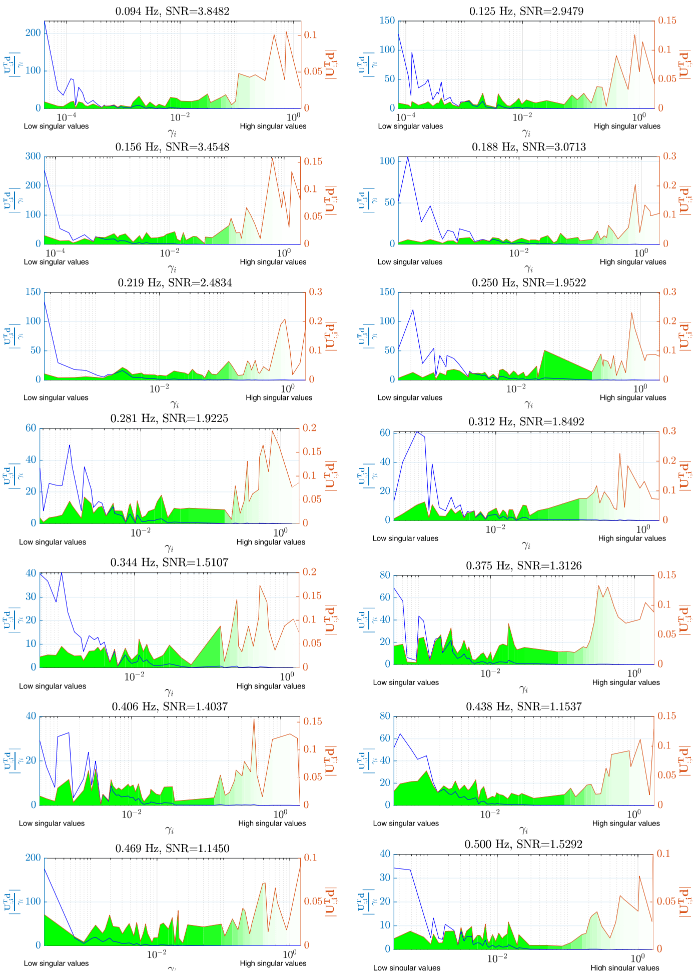
در بخش ۶-۳ و ۶-۵ نتایج حل معکوس را تا بیشینه فرکانس ۰٫۵ Hz ارائه نموده و برای فرکانس‌های بالاتر حل معکوس را انجام نداده‌ایم. حل معکوس برای مؤلفه‌های فرکانس بالای تابع چشمه‌ی لرزه‌زا، در حال حاضر یکی از مسائل مهم پژوهشی در این حوزه است. به طور کلی، اکثر روش‌های حل معکوس سینماتیکی محدود به فرکانس‌های پایین هستند [ایده، ۲۰۱۵]. با دو استدلال می‌توان محدودیت روش‌های حل معکوس سینماتیکی را در مدلسازی مؤلفه‌های فرکانس بالای حرکات زمین توضیح داد. دلیل اول دقت مدل‌های سرعت-چگالی-کاهندگی، و همچنین ناتوانی در مدل‌سازی مستقیم پیچیدگی‌های محیط در فرکانس‌های بالا، شامل توپوگرافی، اثرات ساختگاهی و غیره است. هنگامی که دانش ما از ساختار پوسته در محدوده‌ی طول موج‌های کوتاه (فرکانس‌های بالا) اندک است، و یا زمانی که روش مدلسازی مورد استفاده‌ی ما [مثل روش عدد موج گسسته بوشون، ۲۰۰۳]، امکان مدلسازی پیچیدگی‌های محیط را نمی‌دهد، حل معکوس نیز قادر به یافتن تصویری از فرکانس‌های بالای تابع چشمه نخواهد بود. از این منظر، محدوده‌ی فرکانس بالای حل معکوس با در نظر گرفتن کوتاه‌ترین طول موجی که به صورت قابل اعتماد، با توجه به دانش ما از پیچیدگی‌های پوسته، امکان مدلسازی دارد، مشخص می‌شود [برای مثال بنگرید به سومالا و همکاران، ۲۰۱۸]. برای مثال سوکوس و زاهارادنیک [۲۰۱۳] پیشنهاد کردند که با توجه به مدل‌های موجود پوسته‌ی لرزه‌زا، برای ایستگاه‌های بسیار نزدیک به گسل (۱km ~<) تا فرکانس (۱Hz ~<)، در محدوده‌ی ایستگاه‌های منطقه‌ای نزدیک (۱۰۰km ~) تا فرکانس ۰٫۱Hz ~، و در محدوده‌ی منطقه‌ای[26] ۱۰۰۰km ~ تا فرکانس ۰٫۰۱Hz ~ امکان وارون‌سازی وجود دارد. به عنوان مثال در مورد زلزله‌ی آماتریچه، تینتی و همکاران [۲۰۱۶] به منظور پرهیز از در نظر گرفتن اثرات ناشناخته‌ی محلی همچون اثرات ساختگاهی، از فرکانس بیشینه‌ی ۰٫۵Hz استفاده کردند. فرکانس بیشینه‌ی مشابهی نیز توسط سیرِلا و همکاران [۲۰۱۸]، که از مدل سرعتی IMAGINE-IT [کاساروتی و همکاران، ۲۰۱۶] استفاده نمودند، به کار گرفته شد. فرکانس بیشینه‌ی

[26] Regional

مشابهی نیز توسط پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] و گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] استفاده شده است.

استدلال دوم بر اساس طبیعت بد وضع مسئله‌ی معکوس مورد مطالعه‌ی ماست. برای این منظور از تحلیل تجزیه‌ی مقادیر تکین تعمیم یافته (GSVD) (بخش ۵-۲ رساله) استفاده می‌کنیم. میزان خطای مرتبط با هموار بودن مدل $Cost_{smooth}$ و خطای داده‌ها $Cost_{data}$ که به ترتیب در روابط (۵-۸) و (۵-۱۰) رساله ارائه شده‌اند را در نظر بگیرید. $Cost_{data}$ بر اساس بسط داده‌ها بر روی پایه‌های فضای داده $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ نوشته می‌شود، حال آنکه $Cost_{smooth}$ بر مبنای بسط $\frac{\mathbf{U^T_{:,i}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ به دست می‌آید. شکل ۶-۱۳، ضرایب $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ را در کنار ضرایب $\frac{\mathbf{U^T_{:,i}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ در مقابل مقادیر تکین تعمیم یافته (γ_i) نمایش می‌دهد. توجه کنید که مقادیر بزرگ $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ به ما کمک می‌کنند که اطلاعات نرخ لغزش زلزله را از داده‌ها بیرون بکشیم، حال آنکه مقادیر بزرگ $\frac{\mathbf{U^T_{:,i}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ موجب ناپایداری جواب می‌شوند، چنانکه در شکل ۶-۱۳ مشاهده می‌شود مقادیر بزرگ متغیرهای فوق‌الذکر در دو سمت مقابل مقادیر تکین تعمیم توزیع شده است. چنانچه مقادیر بزرگ $\frac{\mathbf{U^T_{:,i}}\mathbf{d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ و مقایر بزرگ $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ به خوبی از هم جدا باشند، می‌توان مقدار پارامتر فیلتر α را به راحتی انتخاب کرد و محدوده‌ی مقادیر تکین مناسب برای حل معکوس را جدا نمود. این وضعیت در شکل ۶-۱۳ در مورد فرکانس‌های پایین برقرار است. با افزایش فرکانس، تصویر داده‌ها بر روی پایه‌های فضای مدل $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ در محدوده‌ی مقادیر کوچک بزرگتر می‌شود. چون مقادیر تکین کوچک را با اعمال قید منظم‌سازی حذف می‌کنیم، در فرکانس‌های بالاتر، اطلاعات بیشتری را در مقایسه با فرکانس‌های پایین از دست می‌دهیم. در نتیجه، مقدار $Cost_{data}$ با افزایش فرکانس، افزایش می‌یابد. چنین مطالعه‌ای برای حل معکوس در حوزه‌ی زمان، هنگامیکه مؤلفه‌های فرکانسی بالاتر از ۰٫۲ Hz - ۰٫۳ Hz معکوس می‌شوند توسط گالوویچ و زاهارادنیک [۲۰۱۱]و گالوویچ و همکاران [۲۰۱۵] نیز انجام شده است. رابطه‌ی مستقیم قضیه‌ی معرف زلزله‌شناسی، در حوزه‌ی زمان و فرکانس با یکدیگر معادل هستند و در نتیجه دقت رابطه‌ی مستقیم در فرمولبندی حوزه‌ی زمان و فرکانس فرقی نمی‌کند.

توجه کنید که بحث فوق، حد دقیقی برای بالاتر فرکانس قابل معکوس سازی ارائه نمی‌دهد و فقط از آن میفهمیم که وضعیت حل در فرکانس‌های بالاتر، بدتر می‌شود. لذا باید برای حل معکوس یک حد بالایی در نظر بگیریم که ما بر اساس بحث فوق فرکانس ۰٫۵Hz را انتخاب کردیم.



شکل ۶-۱۳: تصویر داده‌ها بر روی پایه‌های فضای داده $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ (خط قرمز) که خطای داده‌ها، $Cost_{data}$ (مساحت سبز رنگ زیر نمودار)، را بسط می‌دهد و در مقابل $\frac{\mathbf{U^T_{:,i}d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ (خط آبی رنگ) در محدوده‌ی فرکانسی داده‌های شتابنگاری برای زلزله‌ی آماتریچه و در آخرین گام آموزشی ترسیم شده است. در فرکانس‌های پایین، مقادیر بزرگ دو متغیر به خوبی از هم مجزا هستند، در نتیجه می‌توان مقدار پارامتر منظم‌ساز α را برای معکوس کردن بخش عمده‌ی داده‌ها به راحتی انتخاب کرد. بر خلاف فرکانس‌های پایین، در فرکانس‌های بالا بخش مهمی از مقادیر $(\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}_{\omega_j})$ در محدوده‌ی $\frac{\mathbf{U^T_{:,i}d}_{\omega_j}}{\gamma_i}$ بزرگ قرار گرفته‌اند. در نتیجه برای رسیدن به حلی پایدار، باید بخش مهمی از داده‌ها را نیز فیلتر کنیم. مقدار نسبت سیگنال به نویز (SNR) با فرض کردن خطای مدل‌سازی به عنوان نویز محاسبه شده است $SNR = \frac{||\mathbf{d}_{\omega_j}||_2}{||\mathbf{GW}_{\omega_j}\mathbf{A}_{\omega_j}-\mathbf{d}_{\omega_j}||_2}$.

۶-۶-۱ مقایسه با مطالعات پیشین

مطالعات پیشین، خصوصیات سینماتیکی چشمه‌ی زمین‌لرزه‌ی ۲۴/آگوست/۲۰۱۶ آماتریچه را با جزئیات مشخص کرده‌اند [تینتی و همکاران، ۲۰۱۶؛ هوآنگ و همکاران، ۲۰۱۷؛ پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷؛ سیرِلا و همکاران، ۲۰۱۸؛ گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b؛ آئوچی و توآردزیک، ۲۰۱۹]. غالب مطالعات بر خصوصیاتی کلی از چشمه، از قبیل شروع آرام گسیختگی[۲۷]، شکست دو سویه و لغزش بیشتر در سوی شمال غربی (NW) اتفاق نظر دارند. در این قسمت، نتایج به دست آمده در این مطالعه را با جزئیاتی بیشتری با مطالعات پیتزی و همکاران [۲۰۱۷]؛ آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹]؛ گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] مقایسه می‌کنیم. مدل لغزش پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] از حل سینماتیکی با استفاده از روش گالوویچ و همکاران [۲۰۱۵] نتیجه شده است، که حائز رتبه‌ی برتر در مثال معیار SIV-inv1 شده است [مای و همکاران، ۲۰۱۶]. مدل‌های ارائه شده توسط آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] و گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] از مدلسازی دینامیکی نتیجه شده‌اند که به صورت فیزیکی پدیده‌ی شکست را مدلسازی می‌کنند. چنانکه پیشتر توضیح داده شد، به منظور مقایسه‌ی عملکرد روش ارائه شده در این رساله با نتایج سایر محققین، برخی از فرضیات مدلسازی روش ما، از قبیل مدل چگالی-سرعت، مجموعه داده‌های جنبش نیرومند و هندسه‌ی گسل مشابه با پیتزی و همکاران [۲۰۱۷]؛ گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] در نظر گرفته شده است.

بسیاری از مدلسازی‌های گسل‌های محدود در دامنه‌ی زمان صورت گرفته است، بنابراین جهت انجام مقایسه بایستی پارامترهای توصیف کننده‌ی شکست را در حوزه‌ی زمان بازسازی کنیم. توجه کنید که در روش پیشنهادی نوروفازی، زمان شروع گسیختگی را به طور صریح محاسبه نمی‌کنیم. مقادیر زمان رسید می‌بایست از روی توابع نرخ لغزش به دست آیند. زمان رسید، لحظه‌ای است که نقطه‌ای مفروض بر روی گسل شروع به لغزش می‌کند. چنین رفتاری به معنی تغییر ناگهانی در مقدار نرخ لغزش است، بنابراین جهش ناگهانی تابع نرخ لغزش از مقدار صفر، لحظه‌ی شروع گسیختگی را مشخص می‌کند. تقریب دقیق چنین جهشی در مقدار تابع نرخ‌لغزش، نیازمند بازسازی مؤلفه‌های فرکانس بالای تابع چشمه است. با این حال، مشابه با روش‌های پیشین [مثلا گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۵]، مدل‌سازی مستقیم ما نیز در تقریب میدان موج در فرکانس‌های بالا دارای محدودیت است. در این مطالعه چون از مدل سرعتی و داده‌های مشاهداتی همانند مطالعات پیشین استفاده کرده‌ایم پیتزی و همکاران [۲۰۱۷]؛ گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b]، بیشینه‌ی فرکانس حل را نیز مشابه با روش‌های پیشین برابر با ۰٫۵Hz در نظر می‌گیریم. با توجه به موارد فوق، زمان رسید را زمانی در نظر می‌گیریم که نرخ لغزش در یک نقطه‌ی بخصوص از

[27] Weak nucleation

مقدار خاصی فراتر رود، در این مطالعه این مقدار را برابر با ۰/۰۲۵m/s در نظر گرفته‌ایم (شکل ۶-۴(ج)). به طور مشابه، فرض کرده‌ایم که لغزش در یک نقطه‌ی بخصوص زمانی می‌ایستد که نرخ لغزش کمتر از ۰/۰۲۵m/s شود. لازم به ذکر است که در حل ما، هیچ قید زمانی به لغزش اعمال نشده است، بنابراین امکان لغزش مجدد برای یک نقطه پس از ایستادن وجود دارد. زمان خیزش نیز به روش مشابهی محاسبه شده است. دقت کنید که مقادیر زمان خیزش و زمان رسید به دست آمده در اینجا، تقریب‌هایی ساده هستند که فقط امکان مقایسه بین روش‌های مختلف را ایجاد می‌کنند و به طور دقیق بازسازی نشده‌اند.

شکل ۶-۱۴ زمان رسید و زمان خیزشی را که از جواب مناسبتر ما، یعنی روش بیشینه‌ی درست‌نمایی به دست آمده است را نشان می‌دهد. به منظور مقایسه، زمان رسید و زمان خیزش مدل سایرین [پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷؛ گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b؛ آئوچی و توآردزیک، ۲۰۱۹] از روی توابع نرخ لغزش آنها، با روشی مشابه مدل خودمان محاسبه شده است. تابع چشمه‌ی [پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷] از بانک اطلاعاتی SRCMOD [مای و ثینگ‌بیجام، ۲۰۱۴] برداشته شده است و حل‌های گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] و آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] مستقیماً از نویسندگان دریافت گردیده است. جواب ما نیز مشابه با نتایج سایرین مؤیّد لغزشی دو سویه است. دقت کنید که در حل ما لغزش برای شروع از نقطه‌ای بخصوص مقیّد نشده است. شکل ۶-۱۴(الف) و ۶-۱۵(الف) نشان می‌دهند که گسیختگی از اعماق کم، در عمق تقریبی ۳/۹km ~ آغاز شده است. شروع گسیختگی نسبتاً آهسته است و ۲ ثانیه پس از زمان مبدأ به بیشینه‌ی نرخ لغزش می‌رسیم. در حل ما، همانند نتایج روش‌های دینامیکی [گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b؛ آئوچی و توآردزیک، ۲۰۱۹]، زمان خیزش در ناحیه‌ی کانونی (۵sec ~) بیشتر از سایر نواحی گسل است. این امر، نشان می‌دهد که فرآیند آزاد شدن تنش بسیار آهسته بوده است. این مقدار به سمت سوی گسل تا انتهای ناحیه‌ی شکستگی کاهش می‌یابد. در حل ما، پس از گذشت ۵ − ۴ ~ ثانیه، شکستگی در ناحیه‌ی جنوب شرقی (SE) از حرکت می‌ایستد. در سمت شمال غربی (NW) شکستگی تا حدود ۶/۵ ~ ثانیه پس از زمان مبدأ ادامه می‌یابد. محدوده‌ی شکستگی وسعتی به ابعاد ۱۳km² × ۲۵ را از سطح گسل اشغال می‌کند. این ناحیه با نتایج حل سینماتیکی پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] قابل قیاس بوده و از محدوده‌ی شکستگی حل‌های دینامیکی بزرگتر است. همانند نتایج پیشین، لغزش نهایی بیشتر در سمت شمال غربی (NW) متمرکز شده است، مشابه با آنچه پیشتر توسط سایر محققین ذکر شده بود (بنگرید به ردیف لغزش نهایی در شکل ۶-۱۵).

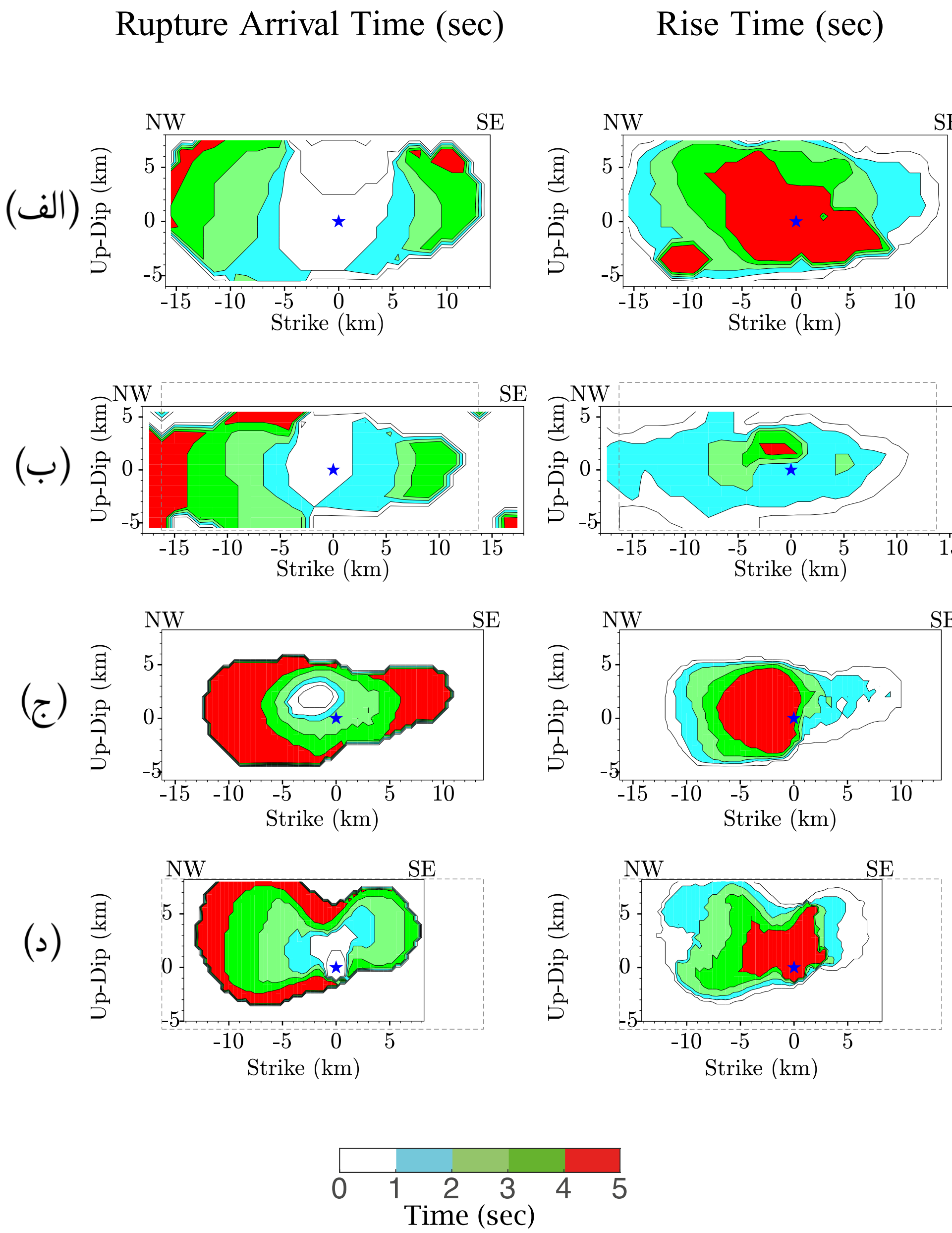
شکل ۶-۱۵ نشان می‌دهد که جواب ما از نظر هندسی و زمانی مشابه نتایج پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] است (شکل ۶-۱۵(ب))، با این حال، دامنه‌ی نرخ لغزش در مدل ما از مدل پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] بیشتر

است. این امر ممکن است به دو دلیل پیش آمده باشد: ۱) داده‌ها در حل معکوس ما فاقد وزن هستند و همه‌ی مشاهدات به اندازه‌ی یکسان (وزن ۱) در به دست آوردن تابع چشمه مشارکت می‌کنند. با وزن‌دهی به داده‌ها، بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت در آنها، ممکن است اهمیت بیشتر به مشاهده‌ای داده شود که دارای خطای بزرگتری بوده است و بدین ترتیب نوفه، مدل را تحت تأثیر قرار دهد. به نظر می‌رسد هنگامی که اطلاعاتی از میزان عدم قطعیت داده‌ها نداریم، وزن دهی یکسان داده‌ها در حل معکوس استراتژی مناسب‌تری باشد. ۲) پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] قیود منظّم‌ساز قدرتمندی را اعمال کرده‌اند که شامل قیود هَموار بودن مکانی و زمانی لغزش، مُمان لرزه‌ای از پیش تعیین شده و عدم وجود پَس‌لغزش (یعنی جهت لغزش یک نقطه عوض نشود) می‌باشد. اعمال قیود متعدد ممکن است منجر به کاهش دامنه‌ی تابع نرخ لغزش بشود. شکل‌های ۶-۱۵(ج) و (د) به ترتیب حل‌های گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] و آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] را نشان می‌دهند. هر دو حل دینامیکی دامنه‌های لغزش بزرگتری را نسبت به حل‌های سینماتیکی نشان می‌دهند. بر خلاف مدلسازی سینماتیکی، در مدلسازی دینامیکی امکان شبیه‌سازی مؤلفه‌های فرکانس بالای چشمه (تا حد ~ 5Hz) وجود دارد. این امر منجر به دامنه‌ی نرخ لغزش‌های بیشتری نسبت به مدلسازی‌های سینماتیکی می‌شود.

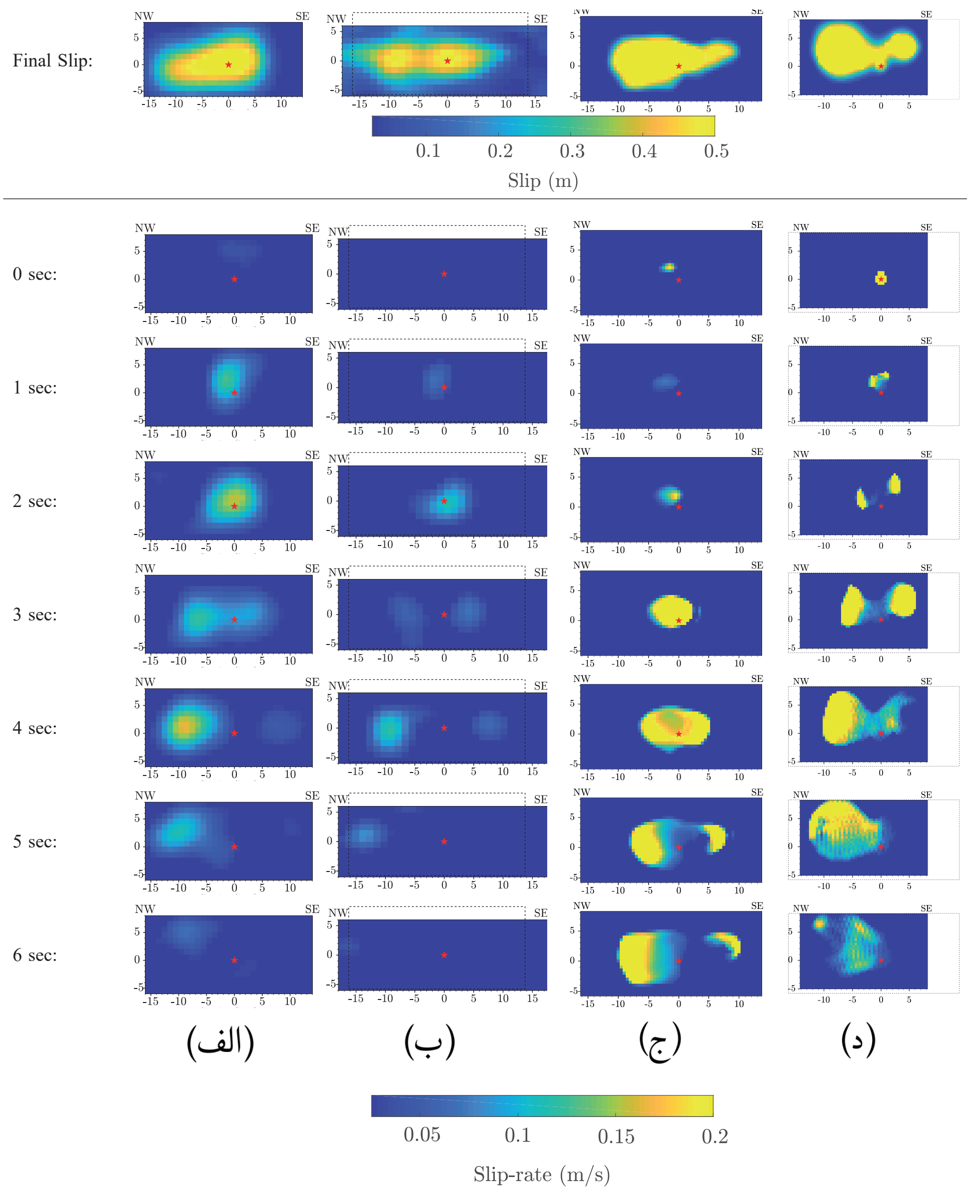
اگرچه محدوده‌ی شروع لغزش در حل ما، دارای انطباق مناسبی با نتایج پیتزی و همکاران [۲۰۱۷]؛ گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] است، با نتایج آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] تفاوت اساسی دارد. این امر ممکن است به این دلیل باشد که ما فرضیات مدلسازی مشابه با این دو مطالعه را در نظر گرفته‌ایم و در این مطالعات کانون زمین‌لرزه و صفحه‌ی گسل بر اساس [چیارالوچی و همکاران، ۲۰۱۷] تعیین شده است، این در حالی است که آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] از یک مدل سرعتی دولایه‌ای متفاوت استفاده می‌کنند و شروع شکستگی را مقید به آغاز از کانونی متفاوت، گزارش شده توسط INGV (http://terremoti.ingv.it/en/event/7073641) کرده‌اند. با این حال، دو تکّه‌ی لغزش، تصویر شده در شمال غربی و جنوب شرقی کانون که توسط آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] و گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] تصویر شده‌اند با نتایج ما سازگارند.

زمان رسید گسیختگی، که معیاری برای سرعت شکست فراهم می‌آورد، الگوی مشابهی با نتایج آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] نشان می‌دهد، با این حال مدل لغزش ما دارای سرعت شکست بیشتری نسبت به گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] است که نشان دهنده‌ی توازن میان دامنه‌ی سرعت لغزش و سرعت شکست در مدلسازی دینامیکی است. کوچکتر بودن محدوده‌ی لغزش در گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] نیز ممکن است به همین دلیل باشد.

مؤلفه‌ی در راستای شیب جواب ما، الگوی مشابهی را در فرکانس‌های مجاور نشان می‌دهد، که این امر برای یک حل خوب، مورد انتظار است (شکل۶-۳(الف)). با این حال، مؤلفه‌ی در راستای امتداد گسل، به شدت در



شکل ۶-۱۴: زمان رسید گسیختگی (چپ) و زمان خیزش (راست) زمین‌لرزه‌ی آماتریچه، بر اساس مدل‌های (الف) مطالعه‌ی حاضر؛ (ب) پیتزی و همکاران [۲۰۱۷]؛ (ج) گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] و (د) آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹]. مدل لغزش نشان داده شده در این شکل به وسیله‌ی روش بیشینه‌ی درست‌نمایی برای تعیین تعداد توابع پایه فازی، ارائه شده در بخش ۶-۵ به دست آمده است. زمان رسید گسیختگی را برابر با لحظه‌ای که نرخ لغزش از ۰/۰۲۵m/s فراتر می‌رود (شکل ۶-۴(ج)) در نظر گرفته‌ایم. زمان خیزش برابر به محدوده‌ی زمانی است که نرخ لغزش بیش‌تر از ۰/۰۲۵m/s می‌باشد. ستاره‌ی آبی رنگ نشان‌داده شده در (الف، ب و ج) نشان‌دهنده‌ی کانون تعیین شده توسط چیارالوچی و همکاران [۲۰۱۷] بوده و در (د) کانون گزارش شده توسط مرکز INGV (http://terremoti.ingv.it/en/event/7073641) می‌باشد.

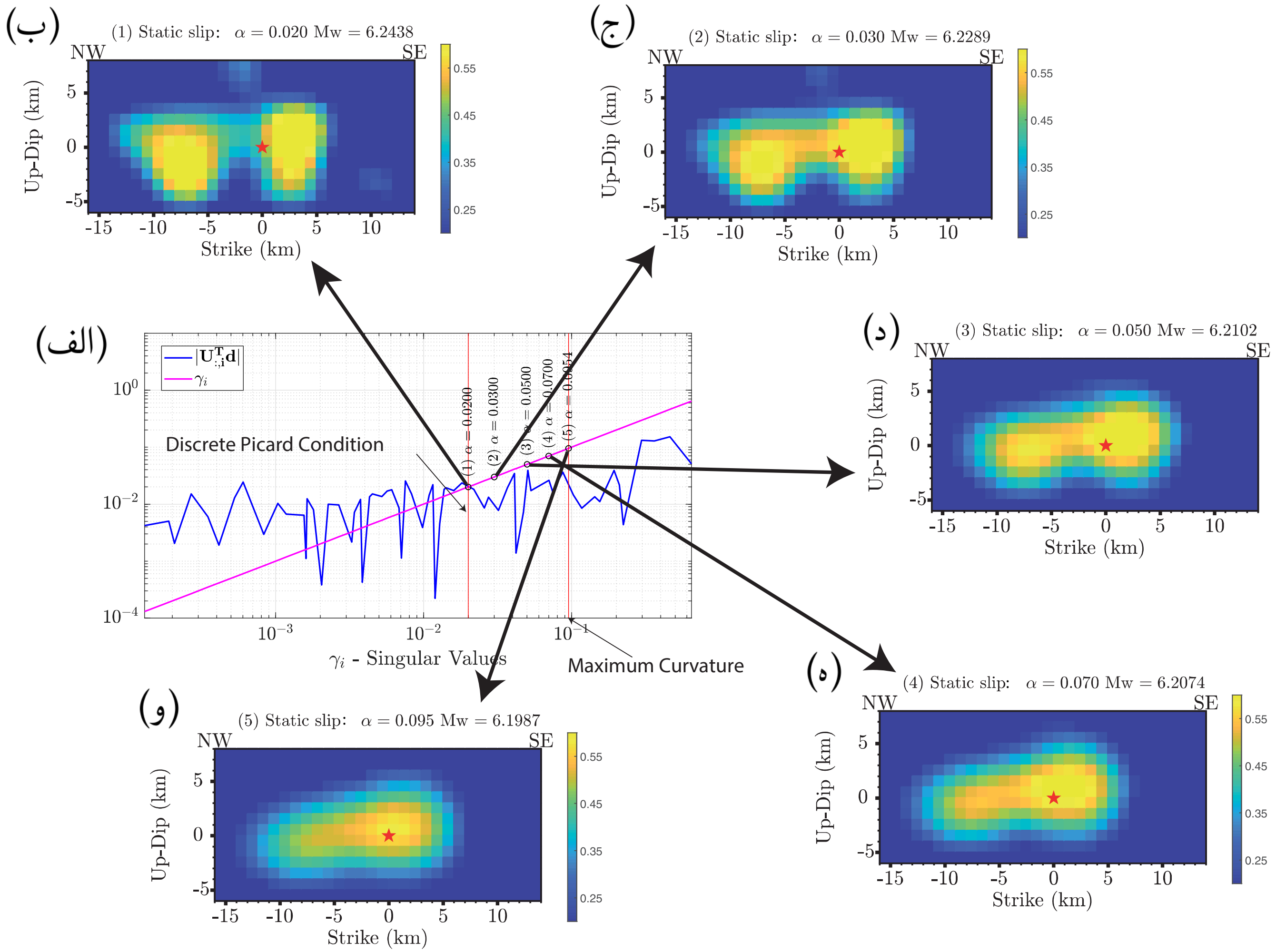


شکل ۶-۱۵: تصویر تابع نرخ لغزش در لحظات مختلف پس از زمان مبدأ، نتایج حاصل از (الف) این مطالعه؛ (ب) پیتزی و همکاران [۲۰۱۷] با استفاده از روش حل معکوس سینماتیکی گسل‌های محدود ارائه شده توسط گالوویچ و همکاران [۲۰۱۵]؛ (ج) گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b] به دست آمده از روش حل معکوس دینامیکی با روش بیزی گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹a]؛ (د) آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] به دست آمده از روش دینامیکی دوگانه. نتایج تمامی روش‌ها بر شکست دوسویه، نرخ لغزش نسبتاً بیشتر در سمت شمال غربی کانون و شروع آرام گسیختگی اتفاق نظر دارند. در شکل‌های (الف)، (ب) و (ج) شروع گسیختگی را از عمق حدوداً ۴/۰۰ km پیشنهاد می‌دهند. در (د) کانون مقید شده است که از نقطه‌ای دیگر آغاز گردد. در (ج و د) سرعت گسیختگی نسبتاً کمتر و محدوده‌ی گسیختگی نسبتاً کوچکتر است. محدوده‌ی گسیختگی کوچکتر، اثر نرخ لغزش بیشتر را جبران می‌کند. خط چین‌ها محدوده‌ی گسلی که در حل پیشنهادی این رساله استفاده شده است را نشان می‌دهد.

فرکانس‌های مجاور متفاوت است(شکل۶-۳(ب)). یک دلیل این عدم شباهت ممکن است به این خاطر باشد که در عمل مولفه‌ی شیب لغزش دارای دامنه‌ی اندکی است و دامنه‌ی شکل موجی که در اثر آن تولید می‌شود، در نویز موجود در داده‌ها گُم می‌شود و داده‌های مربوطه در حل معکوس، مؤلفه‌ی در راستای امتداد را مقیّد نمی‌کنند. در چنین حالتی، برای کاهش عدم قطعیت مؤلفه‌ی در راستای امتداد تابع چشمه، لازم است داده‌های مشاهداتی بیشتری داشته باشیم. راه حل جایگرین اعمال یک قید مشابهت بین لغزش در فرکانس‌های مجاور است.

با وجود شباهت‌های کلی ذکر شده میان مدل لغزش ما و حل‌های پیتزی و همکاران [۲۰۱۷]؛ گالوویچ و همکاران [۲۰۱۹b]؛ آئوچی و توآردزیک [۲۰۱۹] نشان داده شده در بالا، و حل‌های تینتی و همکاران [۲۰۰۵]؛ سیرلا و همکاران [۲۰۱۸] که در بالا نشان نداده‌ایم، تفاوتهای جزئی در محل کانون، سرعت لغزش و دامنه‌ی نرخ لغزش وجود دارد. چنین تفاوت‌هایی ممکن است به دو دلیل اتفاق افتاده باشد: ۱) در روش‌های مختلف، فضای مدل به اشکال متفاوتی گسسته شده‌اند. وقتی فقط با چند تابع پایه‌ی فازی مدل را گسسته می‌کنیم، تنها مقادیر تکین بزرگ در حل معکوس باقی می‌مانند. از این روی جواب ما، بسیار پایدار است و فقط مشخصاتی که به خوبی در داده‌ها مقید شده است را نشان می‌دهند. وجود مقادیر تکین بزرگ، موجب هموار بودنِ تغییراتِ مکانیِ مدل شده است. ۲) روش‌های حل معکوس متفاوت، قیود میرا کننده را با قدرتمندی متفاوتی اعمال می‌کنند. برای بررسی این عامل در تعیین لغزش استاتیکی به شکل ۶-۱۶ توجه کنید. در این شکل که از روش تجربه‌ی مقادیر تکین تعمیم یافته (بخش ۵-۲) برای بررسی حل با تعداد ۴ × ۶ تابع پایه‌ی فازی استفاده شده است، تصویر داده‌های GNSS بر روی پایه‌های فضای داده ($\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}$)، در مقابل مقادیر تکین نشان داده شده است. فرض می‌کنیم مقدار پارامتر میرایی α از ۰/۲۰ (میرائی کم) تا ۰/۹۵ (میرائی زیاد) تغییر کُند. کمترین مقدار ضریب میرائی ($\alpha = ۰/۲۰$) از محل تقاطع دو نمودار ($\mathbf{U^T}_{:,i}\mathbf{d}$) و γ_i بر اساس شرط گسسته‌ی پیکارد (بخش ۲-۴-۱) به دست آمده است. با انتخاب این مقدار α همگرایی حل معکوس تضمین شده است [آستِر و همکاران، ۲۰۱۸]. بزرگترین مقدار α همان نقطه‌ی بیشینه‌ی انحنای منحنی L-curve است. با انتخاب مقادیر میرایی کمتر همچون شکل‌های ۶-۱۶(ب و ج) دو اسپریتی مجزّا قابل تشخیص است. با افزایش مقدار α، مدل لغزش هَموارتر می‌شود و دو اسپریتی به هم می‌پیوندند (شکل‌های ۶-۱۶(د،ه،و)). دلیل وجود لغزش یک تکّه در مدل ما، احتمالاً به دلیل مقدار پارامتر میرایی انتخابی‌مان است. با این حال، ردّپای دو اسپریتی در فرکانس‌های بالاتر دیده می‌شود و به کمک آن می‌توان محلی که بیشترین انرژی از آن ساطع شده است را بر روی گسل تشخیص داد.

در حل معکوس روش پیشنهادی این رساله، منظّم‌سازی وابسته به فرکانس است و سطح میرایی برای هر فرکانس به صورت مستقل و اختصاصی تنظیم شده است.



شکل ۶-۱۶: اثر ضریب میرایی α در بازسازی تکّه‌های لغزش (اسپریتی) با استفاده مدل دارای (۴ × ۶) تابع پایه. (الف) تصویر داده‌های استاتیکی GNSS بر روی پایه‌های فضای داده ($\mathbf{U}^T_{:,i}\mathbf{d}$) (خط آبی) و مقادیر تکین (ارغوانی). (ب–و) لغزش استاتیکی، معکوس شده با ۵ ضریب میرایی مختلف؛ (ب) $\alpha = ۰/۰۲$، (ج) $\alpha = ۰/۰۳$، (د) $\alpha = ۰/۰۵$، (ه) $\alpha = ۰/۰۷$ و (و) $\alpha = ۰/۰۹۵$. کمترین میزان میرائی با استفاده از اصل گسسته‌ی پیکارد تعیین شده است [آستِر و همکاران، ۲۰۱۸]. مقدار بیشینه‌ی میرایی، $\alpha = ۰/۰۹۵$، از بیشینه‌ی انحنای منحنی L-curve به دست آمده است. بزرگای لنگری هر یک از مدل‌ها در بالای آنها نوشته شده است.

۶-۶-۲ پس‌لغزش

در مدلسازی و حل معکوس در حوزه‌ی زمان، می‌توان قید نامنفی بودن نرخ لغزش را به آسانی اعمال کرد. برای مثال می‌توان از روش حدأقل مربعات نامنفی[۲۸] استفاده نمود [برای مثال به روش گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۵، بنگرید]. در روش‌های مدلسازی در حوزه‌ی فرکانسی، همچون روش نوروفازی که ما در این رساله ارائه نمودیم، نمی‌توان قیدی برای نامنفی بودن نرخ لغزش اعمال کرد. مدل‌سازی در حوزه‌ی فرکانسی، نقشی کلیدی در روش نوروفازی ایفا می‌کند، منجر به فرمول‌بندی و رابطه‌ی مستقیم ساده‌تری می‌شود و امکان استفاده از توابع پایه‌ی فازی جهت تقسیم‌بندی مکانی گسل، به صورت بدونِ مش[۲۹] در هر فرکانس را می‌دهد. چون قید نامنفی بودت لغزش را اعمال نکرده‌ایم، تابع نرخ‌لغزشی که به دست آمده است دارای مقادیر منفی است که از نظر فیزیکی نامطلوبند (شکل ۶-۴(ب)). این اتفاق به دلایل زیر رخ داده است:

- نادقیق بودن مدلسازی مستقیم: مدل‌های سرعت-چگالی-کاهندگی، و نرم‌افزارهای شبیه‌سازی شکل موج دارای دقت محدود هستند [اسپودیچ و همکاران، ۲۰۱۹، برای مثال].
- سوگیری[۳۰] به دلیل اعمال قید منظم‌سازی (مثل هموار بودن مکانی لغزش).
- نوفه در داده‌ها، که وقتی ناشناخته باشد، نمی‌توان وزن مناسبی برای داده‌ها تعیین کرد.
- توان محدود در مدلسازی فرکانس‌های بالا، که بالتبع توان محدودی برای حل معکوس فرکانس‌های پایین ایجاد می‌کند.
- عدم وجود قید شباهت در فرکانس‌های مجاور، به نحوی که قید هَموار بودن طیف تابع لغزش در حوزه‌ی فرکانسی هم اعمال شود.

با این وجود، با توجه به شکل ۶-۴(ب)، تابع نرخ لغزش به دست آمده از حل معکوس نوروفازی حتی با اعمال نکردن قید نامنفی بودن معنادار است و چنانچه تعداد توابع پایه با استفاده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی انتخاب گردد، میزان نوسانات نامطلوب و پس‌لغزش، محدود خواهد بود.

[28] Non-negative LSQ
[29] Meshless
[30] Bias

۶-۶-۳ چگونه تعداد مناسبی از توابع پایه را انتخاب کنیم؟

در بخش ۶-۵ روش بیشینه‌ی درست‌نمایی را برای انتخاب تعداد مناسب توابع پایه‌ی فازی در هر فرکانس معرفی کردیم. همچنین نشان دادیم که در روش فوق، در فرکانس‌های پایین، که تغییرات مکانی تابع چشمه به اندازه‌ی فرکانس‌های بالاتر زیاد نیست به تعداد کمتری توابع پایه نیاز است. ممان لرزه‌ای به دست آمده از روش فرامعیّن و بیشینه‌ی درست‌نمایی به ترتیب برابر با $۲/۲۲ \times ۱۰^{۱۸}$N.m و $۲/۲۱ \times ۱۰^{۱۸}$N.m هر دو دارای تطابق خوبی با ممان استاتیک لرزه‌ای تعیین شده توسط GCMT [اِکستروم و همکاران، ۲۰۱۲] $۲/۴۸ \times ۱۰^{۱۸}$N.m هستند.

اگرچه روش بیشینه‌ی درست‌نمایی دارای جواب بهتری است، امّا دارای بار محاسباتی سنگین‌تری نسبت به روش فرامعیّن است. از این روی توصیه می‌شود که از روش بیشینه درست‌نمایی زمانی استفاده شود که امکانات محاسباتی کافی در اختیار هست و جواب دقیقتری مدِّنظر است. توصیه می‌کنیم که برای محاسبه‌ی سریع تابع چشمه از روش فرامعیّن استفاده گردد.

۶-۶-۴ صحت سنجی نتایج به دست آمده از روش نوروفازی

هنگامی که مشاهدات کافی وجود دارد، می‌توان مجموعه‌ی داده‌ها را به دو دسته تقسیم کرد: یک دسته برای آموزش شبکه‌ی عصبی، تعیین پارامترها یا حل معکوس و دسته‌ی دیگر برای ارزیابی نتایج. این روش در علوم داده[31] بسیار متداول است [برای مثال بنگرید به گودفیلو و همکاران، ۲۰۱۶]. داده‌های آموزشی برای تعیین پارامترهای مدل استفاده شده و داده‌های ارزیابی برای آزمون و صحت سنجی نتایج استفاده می‌شود. با مقایسه‌ی خروجی مدل و داده‌های ارزیابی، میتوان تصمیم گرفت که آیا پارامترهای حاصل از حل معکوس می‌توانند رفتار مورد انتظار در داده‌های ارزیابی را بازتولید کنند یا خیر.

با توجه به فراوان بودن داده‌های مشاهداتی برای زمین‌لرزه آماتریچه، تفکیک داده‌ها به دو دسته‌ی داده‌های آموزشی و داده‌های ارزیابی در محدوده‌ی فرکانسی $(۰/۰۶ < f < ۰/۵)$Hz وجود دارد. در این بخش داده‌ها را بر اساس تکنولوژی جمع‌آوری آنها تقسیم می‌کنیم. با داده‌های شتابنگاری فرآیند آموزش انجام شده است و با داده‌های نرخ‌بالای GNSS فرآیند ارزیابی صورت می‌پذیرد.

شکل ۶-۱۸ شکل موج‌های سرعت که برمبنای داده‌های نرخ بالای GNSS محاسبه شده‌اند را به همراه داده‌های شبیه‌سازی شده از حل با روش بیشینه‌ی درست‌نمایی برای تعیین تعداد توابع گسسته‌سازی (بخش ۶-۵) – که آن

[31] Data Science

را ارجح می‌دانیم - نمایش می‌دهد. تمامی شکل موج‌ها در محدوده‌ی فرکانسی حل با داده‌های جنبش‌نیرومند، یعنی $۰/۰۶ - ۰/۵$ Hz فیلتر شده‌اند. مقدار بیشینه‌ی دامنه‌ی هر سری زمانی، مربوط به هر ایستگاه-مؤلفه[۳۲] در مقابل هر سری زمانی نوشته شده است. این مقایسه برای داده‌های شبیه‌سازی شده به روش فرامعیّن (بخش ۶-۳) در شکل ۶-۱۷ نشان داده شده است. در هر دو حالت، مقایسه میان داده‌های شبیه‌سازی شده و مشاهده شده انطباق خوبی را نشان می‌دهد. با این حال روش بیشینه‌ی درست‌نمایی (شکل ۶-۱۸) اندکی بهتر از روش فرامعیّن در بازسازی شکل موج‌های HR-GNSS موفق بوده است. برتری روش بیشینه‌ی درست‌نمایی نه تنها در رابطه با دامنه‌ی موج بلکه در مورد زمان رسید فازها نیز مشاهده می‌شود. مقایسه‌ی میان دامنه‌ی فرکانسی داده‌های شبیه‌سازی شده با هر دو روش تعیین تعداد توابع پایه در شکل ۶-۱۹ انجام شده است. بر اساس شکل ۶-۱۹ مشاهده می‌شود که روش بیشینه‌ی درست‌نمایی قدرت بازسازی بیشتری در فرکانس‌های بالاتر دارد. باید توجه کرد که داده‌های آموزشی و ارزیابی با دو فناوری مختلف برداشت شده‌اند که هر یک از آنها خطاها و عدمِ قطعیت منحصر به خود می‌باشند.

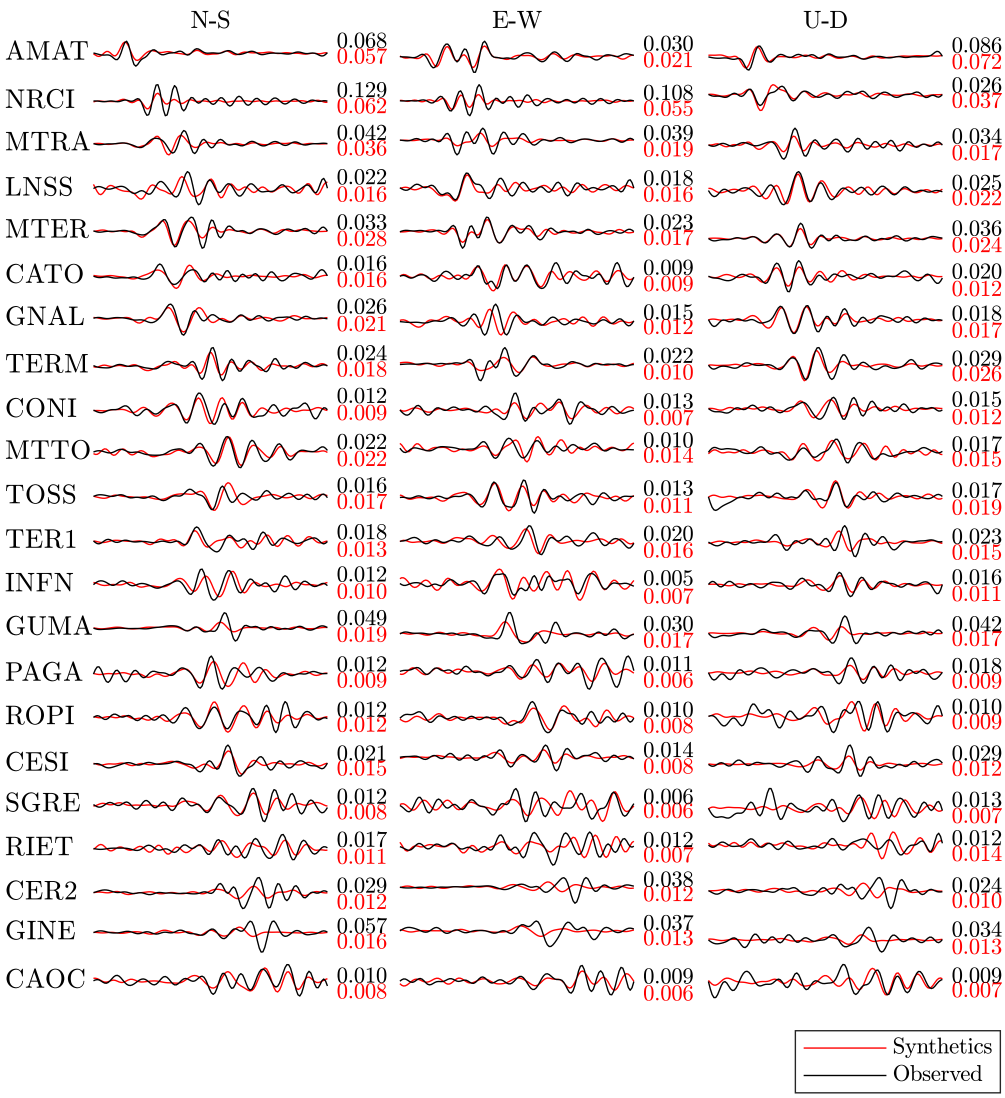
ارزیابی کمّی حل معکوس با دو روش بیشینه‌ی درست‌نمایی و فرامعیّن در جدول ۶-۳، با استفاده از نُرم باقیمانده میان داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های ارزیابی در هر فرکانس، صورت پذیرفته است. مقدار این نُرم باقیمانده، از مجموع سه عامل تشکیل شده است: واریانس داده‌های شبیه‌سازی شده و تغییر مکان واقعی زمین در نقطه‌ی برداشت داده‌ها، سوگیری داده‌های مشاهداتی نسبت به تغییر مکان‌های شبیه‌سازی شده و خطای داده‌برداری HR-GNSS است. روش‌های مختلف گسسته‌سازی و پارامتری کردن مسئله، بر بده-بستان بین واریانس و سوگیری اثر می‌گذارند.

در یک شبکه‌ی عصبی که با تعداد پارامترهای اندک (درجه آزادی مدل کم) آموزش داده شده است، داده‌های شبیه‌سازی شده دارای سوگیری زیاد و واریانس کم نسبت به داده‌های ارزیابی خواهند بود [جیمز و همکاران، ۲۰۱۳]. با افزایش شدید درجات آزادی یک شبکه‌ی عصبی، این سوگیری کاهش یافته و واریانس به شدت افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، تعداد پارامترها (درجه‌ی آزادی) در یک شبکه‌ی عصبی دارای حد بهینه‌ای است که در آن توازنی میان سوگیری و واریانس وجود دارد. چنانچه افزایش تعداد پارامترها منجر به کسب اطلاعات بیشتری از داده‌ها شود، انتظار داریم مجموع واریانس و سوگیری، و در نتیجه نُرم باقیمانده کاهش یافته یا ثابت بماند. در نتایج به دست آمده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی مشاهده می‌شود که میزان نرم باقیمانده تقریباً ثابت مانده است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که افزایش درجه‌ی آزادی، موجب بیش‌برازش مدل به داده‌های آموزش از یک

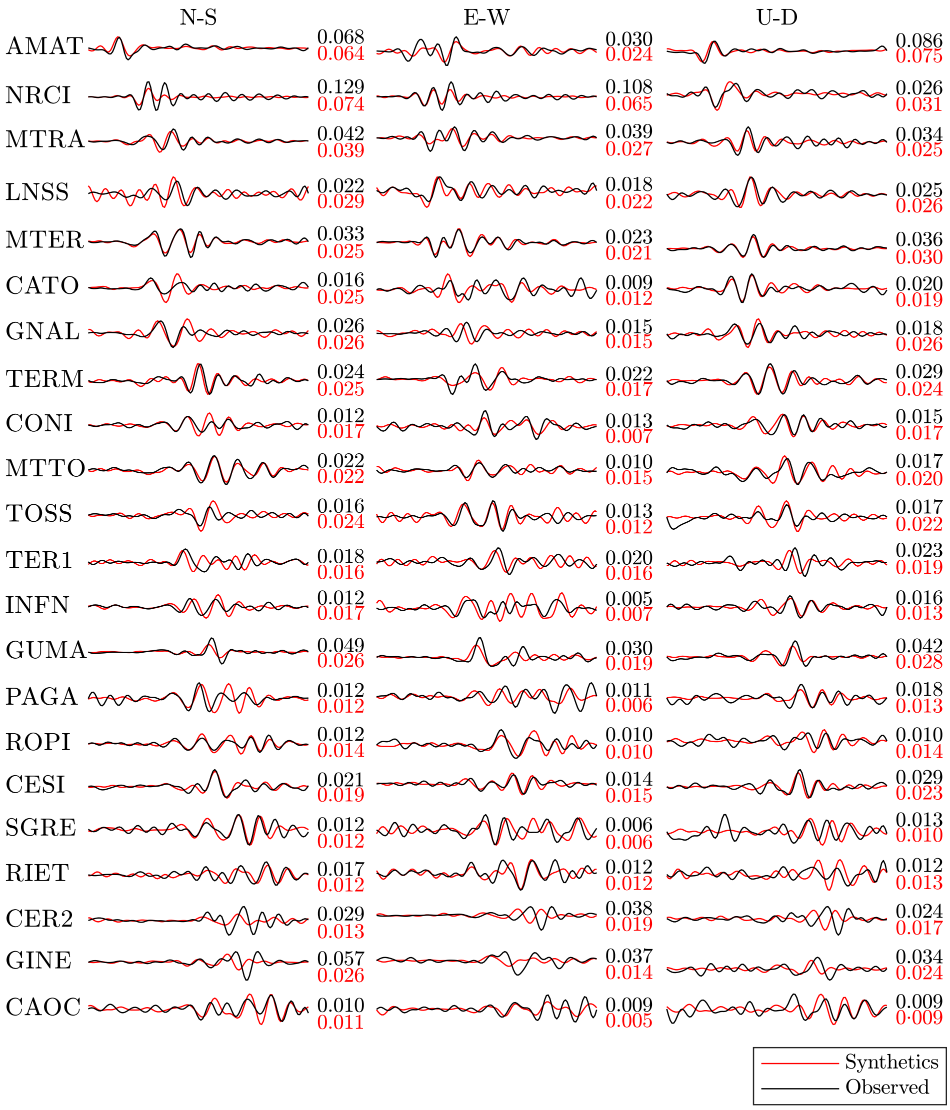
[32] Station-component

سو، و افزایش خطا در انطباق با داده‌های ارزیابی در سوی دیگر نشده است.

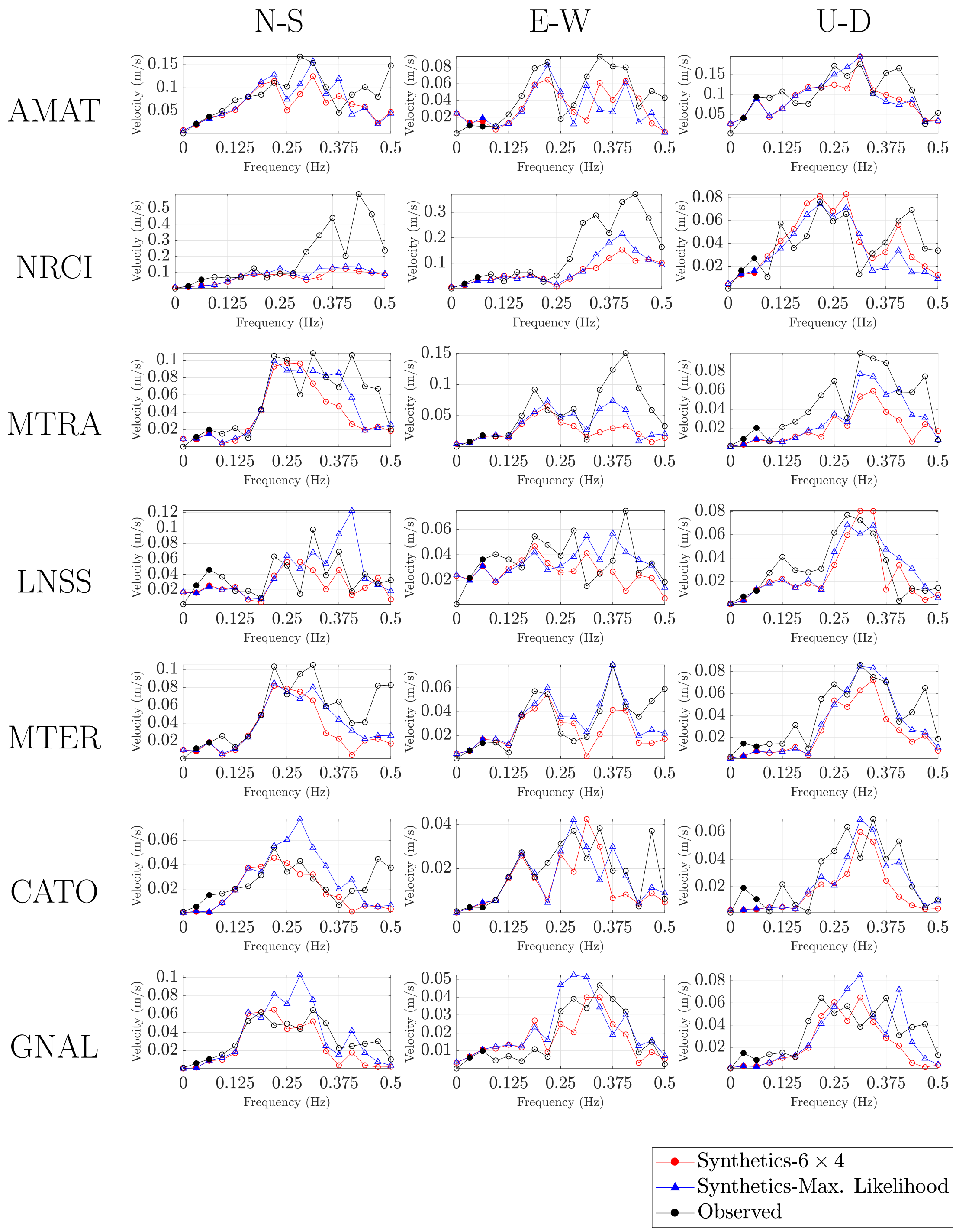
در جدول ۶-۳ نُرم باقیمانده‌ی خطا با افزایش فرکانس، افزایش یافته است. این امر خاطر نشان می‌سازد که عدم قطعیت مدلسازی در فرکانس‌ها بالاتر، بیشتر است. علاوه بر این با ثابت بودن تعداد داده‌ها، رزولوشن مکانی لغزش کاهش می‌یابد [اولسون و اندرسون، ۱۹۸۸]. بنابراین تغییرات کوچک مقیاس لغزش در فرکانس‌های بالا می‌توانند قابل اعتماد نباشند. بنظر می‌رسد قابل اعتمادترین بخش لغزش آن قسمتی باشد که در سایر فرکانس‌ها هم دیده می‌شود، بنابراین یه تکه لغزش کوچک در یک تک فرکانس احتمالاً غیر واقعی است.

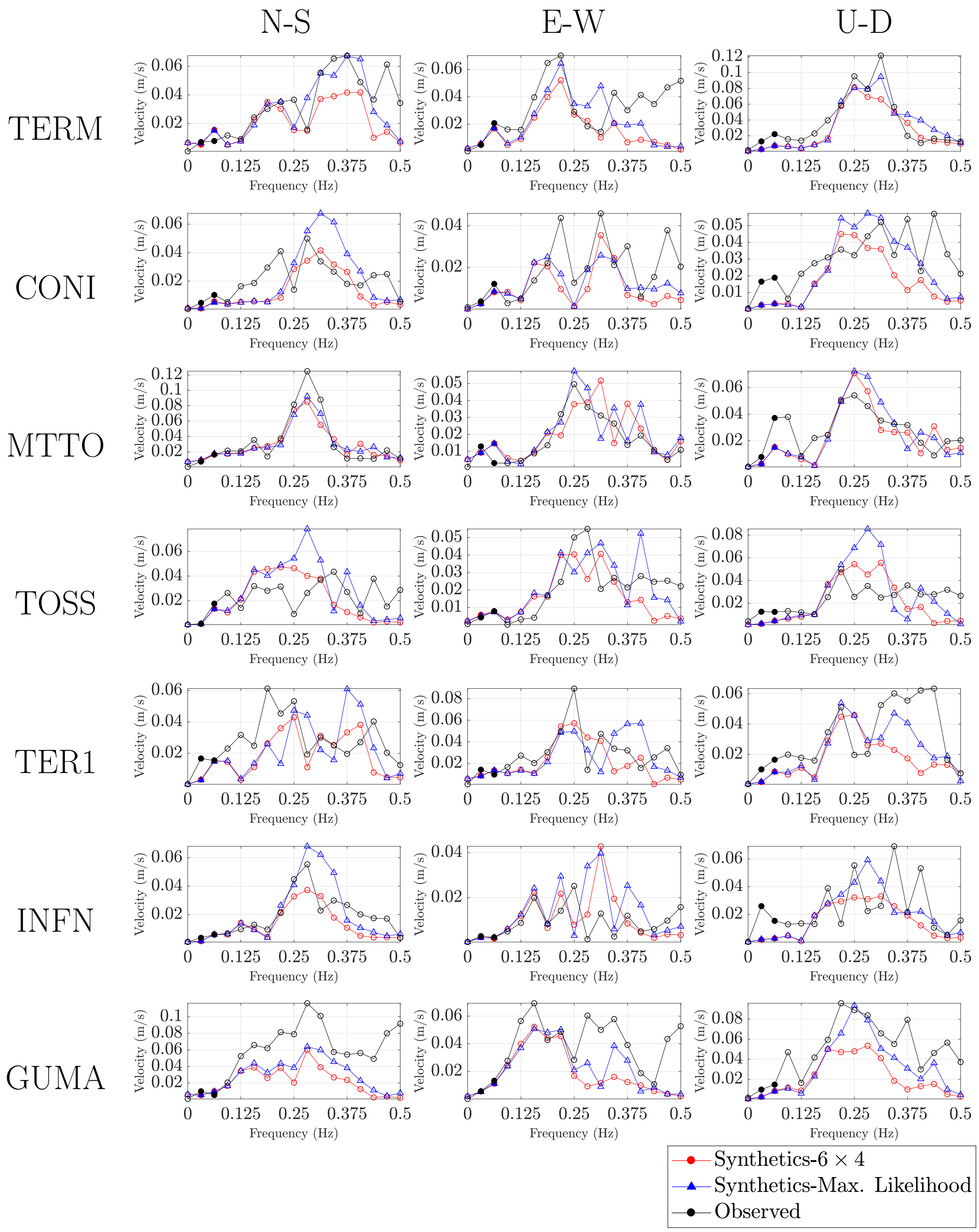


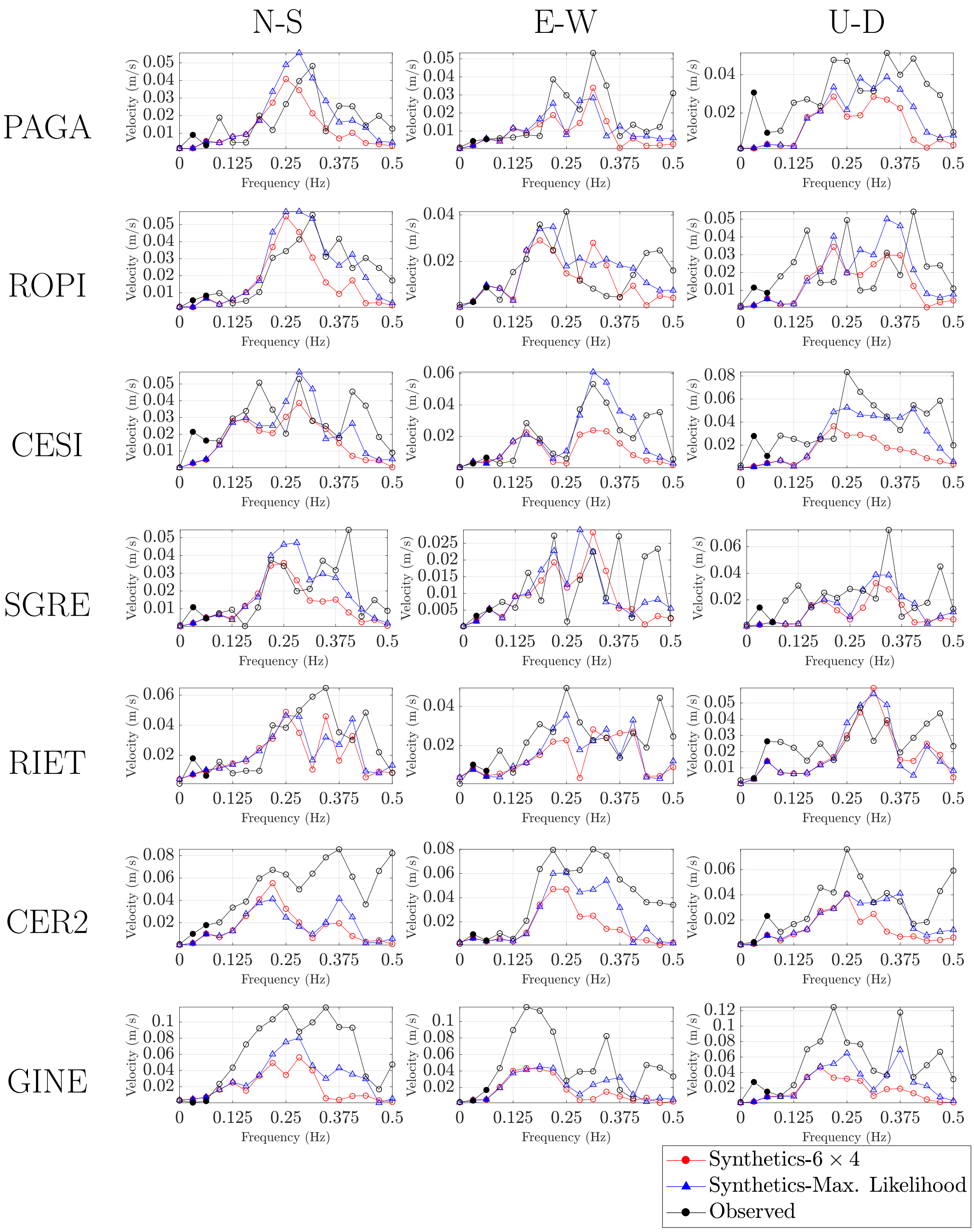
شکل ۶-۱۷: ارزیابی لغزش به دست آمده از حل معکوس داده‌های شتابنگاری با استفاده از داده‌های نرخ‌بالای GNSS که در حل معکوس استفاده نشده‌اند. حل معکوس با استفاده از روش فرامعیّن (بخش ۶-۳) برای انتخاب تعداد مناسب توابع پایه‌ی فازی صورت گرفته است. داده‌های مشاهده شده با رنگ مشکی و داده‌های شبیه‌سازی شده با رنگ قرمز رسم شده‌اند. عدد مقابل هر سری زمانی، بیشینه دامنه‌ی آن سری زمانی را نشان می‌دهد.

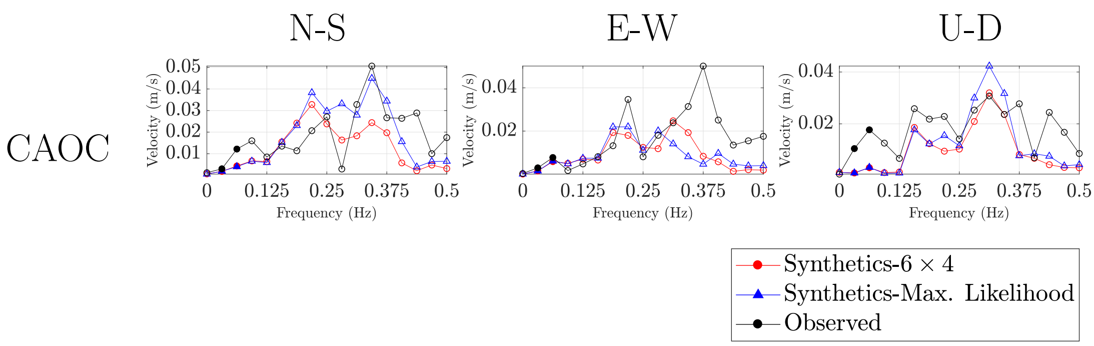


شکل ۶-۱۸: ارزیابی لغزش به دست آمده از حل معکوس داده‌های شتابنگاری با استفاده از داده‌های نرخ‌بالای GNSS که در حل معکوس استفاده نشده‌اند. حل معکوس با استفاده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی (بخش ۶-۵) برای انتخاب تعداد مناسب توابع پایه‌ی فازی صورت گرفته است. داده‌های مشاهده شده با رنگ مشکی و داده‌های شبیه‌سازی شده با رنگ قرمز رسم شده‌اند. عدد مقابل هر سری زمانی، بیشینه دامنه‌ی آن سری زمانی را نشان می‌دهد.


N-S
E-W
U-D
AMAT
NRCI
MTRA
LNSS
MTER
CATO
GNAL
Velocity (m/s)
Frequency (Hz)
Synthetics-6 × 4
Synthetics-Max. Likelihood
Observed


N-S
E-W
U-D
TERM
CONI
MTTO
TOSS
TER1
INFN
GUMA
Velocity (m/s)
Frequency (Hz)
0
0.125
0.25
0.375
0.5
Synthetics-6 × 4
Synthetics-Max. Likelihood
Observed


N-S
E-W
U-D
PAGA
ROPI
CESI
SGRE
RIET
CER2
GINE
Velocity (m/s)
Frequency (Hz)
Synthetics-6 × 4
Synthetics-Max. Likelihood
Observed



شکل ۶-۱۹: ارزیابی جواب حل معکوس، در حوزه‌ی فرکانس، با استفاده از داده‌های نرخ‌بالای HR-GNSS (رنگ سیاه) برای دو روش تعیین تعداد توابع پایه‌ی فازی: روش فرامعیّن (بخش ۶-۳) مشخص شده با رنگ قرمز و روش بیشینه‌ی درست‌نمایی (بخش ۶-۵) که با رنگ آبی نشان داده شده است.

فصل ۷

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این رساله، روشی نوین بر مبنای تکنیک‌های یادگیری ماشین، جهت حل معکوس سینماتیکی چشمه‌ی لرزه‌زا ارائه دادیم. در روش پیشنهادی، حل معکوس در حوزه‌ی فرکانسی فرمول‌بندی شده است. در هر فرکانس، توزیع مکانی لغزش بر حسب تعداد کمی توابع تطبیقی فازی توصیف شد، از این روی تعداد اندکی پارامتر برای توصیف مکانی لغزش مورد استفاده قرار می‌گیرد. توابع پایه‌ی مناسب با استفاده از **شبکه‌ی عصبی تطبیق پذیر فازی** (ANFIS) به دست می‌آیند. در روش پیشنهادی این رساله، فرآیند آموزش شبکه‌ی عصبی (ANFIS)، به نحوی منظّم‌سازی شده است که علاوه بر تطبیق مناسب داده‌های مشاهداتی و داده‌های شبیه‌سازی شده، توزیع لغزش نیز بر روی گسل هموار باشد. کاهش تعداد توابع پایه جهت تقریب توزیع لغزش، موجب کاهش تعداد مقادیر تکین کوچک و کاهش میزان بَدوضع بودن مسئله می‌شود و پایداری حل را بهبود می‌بخشد. با استفاده از روش GSVD شرایطی که حل معکوس بر طبق آن خوب وضع و یا بد وضع است مورد بررسی قرار گرفت. در روش پیشنهادی، انتخاب ضریب میرایی (منظّم‌سازی) با استفاده از نمودارهای L-curve صورت می‌پذیرد، از این روی می‌توان مجموعه‌ای از مقادیر تکین را انتخاب نمود که با استفاده از آنها می‌توان مسئله را به صورت خوب وضع حل کرد. جواب به دست آمده از روش پیشنهادی در گام‌های متوالی بهبود می‌یابد و گام به گام به مدل‌هایی با تطابق بهتر با داده‌ها و همواری بیشتر در فضای مدل می‌رسد. به دلیل استفاده‌ی کمتر از توابع پایه، روش پیشنهادی دارای رزولوشن کمتری نسبت به روش‌های کلاسیک است.

در فصل ۶ عملکرد روش پیشنهادی با داده‌های حقیقی ثبت شده طی زمین لرزه‌ی ۲۴ آگوست ۲۰۱۶ آماتریچه با بزرگای گشتاوری ۶.۲ مورد ارزیابی قرار گرفت. زمین لرزه‌ی آماتریچه در زمره‌ی زمین‌لرزه‌هایی است که به خوبی

در حوزه‌ی نزدیک ثبت شده‌اند. در این مطالعه، دو روش متفاوت را برای تعیین تعداد توابع پایه مورد استفاده قرار دادیم: ۱) انتخاب تعداد توابع پایه به نحوی که مسئله‌ی معکوس در گام خطی، فرامعیُن باشد، ۲) استفاده از روش بیشینه‌ی درست‌نمایی جهت انتخاب کمترین تعداد توابع پایه که در دسته‌ی دارای بیشترین درست‌نمایی هستند. هر دو روش ویژگی‌های مشابهی از لغزش گسل را آشکار می‌سازند که تایید کننده‌ی مطالعات قبلی [پیتزی و همکاران، ۲۰۱۷؛ آئوچی و توآردزیک، ۲۰۱۹؛ گالوویچ و همکاران، ۲۰۱۹b] است. با این وجود، با توجه به نتایج روش بیشینه‌ی درست‌نمایی میبینیم که در فرکانس‌های بالا به تعداد بیشتری توابع پایه جهت توصیف مناسب لغزش نیاز است. استفاده از توابع پایه‌ی بیشتر، علاوه بر آشکار نمودن جزئیات بیشتر از توزیع لغزش به بهبود تطابق میان داده‌های مشاهداتی و شبیه‌سازی شده منجر می‌شود. لغزش به دست آمده از حل معکوس دارای شباهت‌های زیادی با حل‌های پیشین است، با این حال محدوده‌ی لغزش به دست آمده از حل‌های دینامیکی بزرگتر است. در انتهای فصل ۶ حل به دست آمده با استفاده از داده‌های HR-GNSS، که در حل معکوس استفاده نشده بودند، در محدوده‌ی فرکانسی ۰٫۰۶ – ۰٫۵ Hz مورد ارزیابی قرار گرفت. تطابق مناسب میان داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های تست، نشان دهنده‌ی کیفیت بالای جواب محاسباتی است. جواب که در این رساله ارائه شده است، شروعی ضعیف، طی زمانی در حدود ۲ ثانیه را برای آغاز شکستگی گسل نشان می‌دهد که پس از آغاز شکستگی به دو سوی شمال غربی و شمال شرقی پیش رفته و بیشینه‌ی لغزش آن در سمت شمال غربی است.

مراجع

Aki, K. and Richards, P. G. (2002), *Quantitative seismology*. ژ, 4, 176, 181

Ameri, G., Gallovič, F., and Pacor, F. (2012), “Complexity of the Mw 6.3 2009 L’Aquila (central Italy) earthquake: 2. Broadband strong motion modeling,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117. ژ, 119, 120

Ampuero, J.-P. (2012), “A Spectral Element Method tool for 2D wave propagation and earthquake source dynamics User’s Guide,” . 3

Aochi, H. and Twardzik, C. (2019), “Imaging of Seismogenic Asperities of the 2016 ML 6.0 Amatrice, Central Italy, Earthquake Through Dynamic Rupture Simulations,” *Pure and Applied Geophysics*. 113, 115, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 162

Aster, R. C., Borchers, B., and Thurber, C. H. (2018), *Parameter estimation and inverse problems*, Elsevier. 13, 14, 70, 88, 149, 150

Avallone, A., Latorre, D., Serpelloni, E., Cavaliere, A., Herrero, A., Cecere, G., D’Agostino, N., D’Ambrosio, C., Devoti, R., Giuliani, R., Mattone, M., Calcaterra, S., Gambino, P., Abruzzese, L., Cardinale, V., Castagnozzi, A., Luca, G. D., Falco, L., Memmolo, A., Migliari, F., Minichiello, F., Moschillo, R., Massucci, A., Zarrili, L., and Selvaggi, G. (2016), “Coseismic displacement waveforms for the 2016 August 24 Mw 6.0 Amatrice earthquake (central Italy) carried out from High-Rate GPS data,” *Annals of Geophysics*, 59. 117, 118

Avallone, A., Selvaggi, G., D’Anastasio, E., D’Agostino, N., Pietrantonio, G., Riguzzi, F., Serpelloni, E., Anzidei, M., Casula, G., Cecere, G., D’Ambrosio, C., Martino, P. D., Devoti, R., Falco, L., Mattia, M., Rossi, M., Obrizzo, F., Tammaro, U., and Zarrilli, L. (2010), “The RING network: improvement of a GPS velocity field in the central Mediterranean,” *Annals of Geophysics*, 53, 39–54. 118

Barnhart, W. and Lohman, R. (2010), "Automated fault model discretization for inversions for coseismic slip distributions," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115. ذ, 33, 34

Bertiger, W., Desai, S. D., Haines, B., Harvey, N., Moore, A. W., Owen, S., and Weiss, J. P. (2010), "Single receiver phase ambiguity resolution with GPS data," *Journal of Geodesy*, 84, 327–337. 118

Bouchon, M. (1981), "A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media," *Bulletin of the Seismological Society of America*, 71, 959–971. 71

— (2003), "A review of the discrete wavenumber method," *Pure and applied Geophysics*, 160, 445–465. 141

Boyd, S. P. and Vandenberghe, L. (2004), *Convex optimization*, Cambridge university press. 41

Buckley, J. (1992), "Universal fuzzy controllers," *Automatica*, 28, 1245 – 1248. 44, 56

Burridge, R. and Knopoff, L. (1964), "Body force equivalents for seismic dislocations," *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54, 1875–1888. 6

Casarotti, E., Magnoni, F., Faenza, L., Comunello, F., Polidoro, P., and Mulargia, S. (2016), "Fast 3D seismic wave simulations of 24 August 2016 Mw 6.0 central Italy earthquake for visual communication," *Annals of Geophysics*, 59. 141

Cesca, S. and Heimann, S. (2013), "A practical on moment tensor inversion using the Kiwi tools," *New Manual of Seismological Observatory Practice (NMSOP)*, 2, 1–24. 181

Cesca, S., Heimann, S., Stammler, K., and Dahm, T. (2010), "Automated procedure for point and kinematic source inversion at regional distances," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115. 181

Cheloni, D., De Novellis, V., Albano, M., Antonioli, A., Anzidei, M., Atzori, S., Avallone, A., Bignami, C., Bonano, M., Calcaterra, S., Castaldo, R., Casu, F., Cecere, G., De Luca, C., Devoti, R., Di Bucci, D., Esposito, A., Galvani, A., Gambino, P., Giuliani, R., Lanari, R., Manunta, M., Manzo, M., Mattone, M., Montuori, A., Pepe, A., Pepe, S., Pezzo, G., Pietrantonio, G., Polcari, M., Riguzzi, F., Salvi, S., Sepe, V., Serpelloni, E., Solaro, G., Stramondo, S., Tizzani, P., Tolomei, C., Trasatti, E., Valerio, E., Zinno, I., and Doglioni, C. (2017), "Geodetic model of the 2016 Central Italy earthquake sequence inferred from InSAR and GPS data," *Geophysical Research Letters*, 44, 6778–6787. 114, 117

Cheloni, D., Serpelloni, E., Devoti, R., D'Agostino, N., Pietrantonio, G., Riguzzi, F., Anzidei, M., Avallone, A., Cavaliere, A., Cecere, G., D'Ambrosio, C., Esposito, A., Falco, L., Galvani, A., Selvaggi, G., Sepe, V., Calcaterra, S., Giuliani, R., Mattone, M., Gambino, P., Abruzzese, L., Cardinale, V., Castagnozzi, A., Luca, G. D., Massucci, A., Memmolo, A., Migliari, F., Minichiello, F., and Zarrilli, L. (2016), "GPS observations of coseismic deformation following the 2016, August 24, Mw 6 Amatrice earthquake (central Italy): data, analysis and preliminary fault model," *Annals of Geophysics*, 59. 118

Chiaraluce, L., Di Stefano, R., Tinti, E., Scognamiglio, L., Michele, M., Casarotti, E., Cattaneo, M., De Gori, P., Chiarabba, C., Monachesi, G., Lombardi, A., Valoroso, L., Latorre, D., and Marzorati, S. (2017), "The 2016 Central Italy Seismic Sequence: A First Look at the Mainshocks, Aftershocks, and Source Models," *Seismological Research Letters*, 88, 757–771. 114, 116, 123, 127, 128, 146, 147

Cirella, A., Pezzo, G., and Piatanesi, A. (2018), "Rupture Kinematics and Structural-Rheological Control of the 2016 Mw6.1 Amatrice (Central Italy) Earthquake From Joint Inversion of Seismic and Geodetic Data," *Geophysical Research Letters*, 45, 12,302–12,311. 113, 141, 144, 149

Cohen, A. (2003), *Numerical analysis of wavelet methods*, vol. 32, Elsevier. 45

Cotton, F. and Campillo, M. (1995), "Frequency domain inversion of strong motions: Application to the 1992 Landers earthquake," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 100, 3961–3975. 40

Coutant, O. (1989), "Program of numerical simulation AXITRA," *Res. Rep. LGIT (in French), Universite Joseph Fourier, Grenoble*. 71

Custódio, S., Liu, P., and Archuleta, R. J. (2005), "The 2004 Mw6.0 Parkfield, California, earthquake: Inversion of near-source ground motion using multiple data sets," *Geophysical Research Letters*, 32. 38

Dahm, T. and Krüger, F. (2014), "Moment tensor inversion and moment tensor interpretation," in *New Manual of Seismological Observatory Practice 2 (NMSOP-2)*, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, pp. 1–37. 181

Das, S. and Kostrov, B. (1990), "Inversion for seismic slip rate history and distribution with stabilizing constraints: Application to the 1986 Andreanof Islands earthquake," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 95, 6899–6913. 36, 38, 40

Day, S. M., Dalguer, L. A., Lapusta, N., and Liu, Y. (2005), "Comparison of finite difference and boundary integral solutions to three-dimensional spontaneous rupture," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 110. 3

Delouis, B., Giardini, D., Lundgren, P., and Salichon, J. (2002), "Joint inversion of InSAR, GPS, teleseismic, and strong-motion data for the spatial and temporal distribution of earthquake slip: Application to the 1999 Izmit mainshock," *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92, 278–299. 34, 37

Di Carli, S., François-Holden, C., Peyrat, S., and Madariaga, R. (2010), "Dynamic inversion of the 2000 Tottori earthquake based on elliptical subfault approximations," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115. 34

Dickerson, J. A. and Kosko, B. (1996), "Fuzzy function approximation with ellipsoidal rules," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 26, 542–560. 48, 49

Dunham, E. M. and Archuleta, R. J. (2004), "Evidence for a supershear transient during the 2002 Denali fault earthquake," *Bulletin of the Seismological Society of America*, 94, S256–S268. 36

Duru, K., Dunham, E., and Bydlon, S. (2014), "Finite Difference Quake and Wave Laboratory (FD-Q-WaveLab)," . 3

Ekstrom, G., Nettles, M., and Dziewoński, A. (2012), "The global CMT project 2004–2010: Centroid-moment tensors for 13,017 earthquakes," *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 200-201, 1 – 9. 114, 152

Engl, H. W., Hanke, M., and Neubauer, A. (1996), *Regularization of inverse problems*, vol. 375, Springer Science & Business Media. 13

Fan, W., Shearer, P. M., and Gerstoft, P. (2014), "Kinematic earthquake rupture inversion in the frequency domain," *Geophysical Journal International*, 199, 1138–1160. 39, 41, 78, 112

Gallovič, F., Imperatori, W., and Mai, P. M. (2015), "Effects of three-dimensional crustal structure and smoothing constraint on earthquake slip inversions: Case study of the Mw6. 3 2009 L'Aquila earthquake," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 120, 428–449. 38, 41, 115, 142, 144, 148, 151

Gallovič, F., Valentová, L., Ampuero, J.-P., and Gabriel, A.-A. (2019a), "Bayesian Dynamic Finite-Fault Inversion: 1. Method and Synthetic Test," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 124, 6949–6969. 148

— (2019b), “Bayesian Dynamic Finite-Fault Inversion: 2. Application to the 2016 Mw 6.2 Amatrice, Italy, Earthquake,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 3, 4, 113, 115, 116, 117, 118, 121, 142, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 162

Gallovič, F. and Zahradník, J. (2011), “Toward understanding slip inversion uncertainty and artifacts: 2. Singular value analysis,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 116. 142

Galvani, A., Anzidei, M., Devoti, R., Esposito, A., Pietrantonio, G., Pisani, A. R., Riguzzi, F., and Serpelloni, E. (2013), “The interseismic velocity field of the central Apennines from a dense GPS network,” *Annals of Geophysics*, 55. 118

Global, C. (2010), “Web Page,” *Global Centroid Moment Tensor Project*. 181

Goodfellow, I., Bengio, Y., and Courville, A. (2016), *Deep Learning*, MIT Press, `http://www.deeplearningbook.org`. 152

Hallo, M. and Gallovič, F. (2020), “Bayesian Self-Adapting Fault Slip Inversion With Green’s Functions Uncertainty and Application on the 2016 Mw7. 1 Kumamoto Earthquake,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 125, e2019JB018703. 38

Hansen, P. C. (2005), *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*, SIAM. 13, 19, 20, 22, 28, 85, 90, 120, 134

Hansen, P. C. and O’Leary, D. P. (1993), “The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems,” *SIAM journal on scientific computing*, 14, 1487–1503. 23, 28

Hartzell, S. H. and Heaton, T. H. (1983), “Inversion of strong ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California, earthquake,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73, 1553–1583. 31, 34, 39

Heimann, S., Isken, M., Kühn, D., Sudhaus, H., Steinberg, A., Daout, S., Cesca, S., Bathke, H., and Dahm, T. (2018), “Grond: A probabilistic earthquake source inversion framework,” . 181

Herring, T., King, R., and McClusky, S. (2010), “GAMIT reference manual, release 10.4,” *Massachusetts Institute of Technology, Cambridge*. 118

Huang, M.-H., Fielding, E. J., Liang, C., Milillo, P., Bekaert, D., Dreger, D., and Salzer, J. (2017), “Coseismic deformation and triggered landslides of the 2016 Mw 6.2 Amatrice earthquake in Italy,” *Geophysical Research Letters*, 44, 1266–1274. 113, 114, 144

Ida, Y. (1972), "Cohesive force across the tip of a longitudinal-shear crack and Griffith's specific surface energy," *Journal of Geophysical Research*, 77, 3796–3805. 3

Ide, S. (2015), "4.09 - Slip Inversion," in *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, ed. Schubert, G., Oxford: Elsevier, second edition ed. , pp. 215–241. 141

INGV Ring Working Group and others (2016), "Rete Integrata Nazionale GPS," . 118

INGV Seismological Data Centre (1997), "Rete Sismica Nazionale (RSN)," . 118

James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2013), *An introduction to statistical learning*, vol. 112, Springer. 107, 153

Jang, J., Sun, C., and Mizutani, E. (1997), *Neuro-fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*, MATLAB curriculum series, Prentice Hall. 47, 56, 57

Jang, J. . R. (1993), "ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 23, 665–685. 48, 51, 57, 59, 60, 67

Jang, J. . R. and Chuen-Tsai Sun (1995), "Neuro-fuzzy modeling and control," *Proceedings of the IEEE*, 83, 378–406. 44

Jang, J.-S. R. et al. (1991), "Fuzzy modeling using generalized neural networks and kalman filter algorithm." in *AAAI*, vol. 91, pp. 762–767. 58

Kaneko, Y., Lapusta, N., and Ampuero, J.-P. (2008), "Spectral element modeling of spontaneous earthquake rupture on rate and state faults: Effect of velocity-strengthening friction at shallow depths," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 113. 3

Käser, M., Castro, C., Hermann, V., and Pelties, C. (2010), "SeisSol–a software for seismic wave propagation simulations," in *High Performance Computing in Science and Engineering, Garching/Munich 2009*, Springer, pp. 281–292. 3

Klir, G. J. and Yuan, B. (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*, vol. 574, Prentice Hall PTR New Jersey. 54

Kosko, B. (1994), "Fuzzy systems as universal approximators," *IEEE Transactions on Computers*, 43, 1329–1333. 44, 48, 56

Kostrov, B. (1964), “Selfsimilar problems of propagation of shear cracks,” *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 28, 1077–1087. 36, 37

Kostrov, B. V. and Das, S. (1988), *Principles of earthquake source mechanics*, Cambridge University Press. 3

Lavecchia, G., Castaldo, R., de Nardis, R., De Novellis, V., Ferrarini, F., Pepe, S., Brozzetti, F., Solaro, G., Cirillo, D., Bonano, M., Boncio, P., Casu, F., De Luca, C., Lanari, R., Manunta, M., Manzo, M., Pepe, A., Zinno, I., and Tizzani, P. (2016), “Ground deformation and source geometry of the 24 August 2016 Amatrice earthquake (Central Italy) investigated through analytical and numerical modeling of DInSAR measurements and structural-geological data,” *Geophysical Research Letters*, 43, 12,389–12,398. 114

Liu, P. and Archuleta, R. J. (2004), “A new nonlinear finite fault inversion with three-dimensional Green’s functions: Application to the 1989 Loma Prieta, California, earthquake,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 109. 32, 38, 41

Luzi, L., Puglia, R., Russo, E., and ORFEUS WG5 (2016), “Engineering strong motion database, version 1.0,” *Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Observatories & Research Facilities for European Seismology.*, 10, 987–97. 116, 118

Magnoni, F. and Casarotti, E. (2016), “Kinematic finite fault and 3D seismic wave propagation of the 24 August, 2016, Mw 6.0 central Italy earthquake,” *Annals of Geophysics*, 59. 113

Mai, P. M. and Beroza, G. C. (2002), “A spatial random field model to characterize complexity in earthquake slip,” *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 107, ESE–10. 3

Mai, P. M., Schorlemmer, D., Page, M., Ampuero, J.-P., Asano, K., Causse, M., Custodio, S., Fan, W., Festa, G., Galis, M., Gallovic, F., Imperatori, W., Käser, M., Malytskyy, D., Okuwaki, R., Pollitz, F., Passone, L., Razafindrakoto, H. N. T., Sekiguchi, H., Song, S. G., Somala, S. N., Thingbaijam, K. K. S., Twardzik, C., van Driel, M., Vyas, J. C., Wang, R., Yagi, Y., and Zielke, O. (2016), “The Earthquake-Source Inversion Validation (SIV) Project,” *Seismological Research Letters*, 87, 690–708. 8, 9, 42, 70, 72, 111, 144

Mai, P. M. and Thingbaijam, K. K. S. (2014), “SRCMOD: An Online Database of Finite-Fault Rupture Models,” *Seismological Research Letters*, 85, 1348–1357. 34, 145

Mamdani, E. H. and Assilian, S. (1975), “An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller,” *International journal of man-machine studies*, 7, 1–13. 48

Massonnet, D. and Feigl, K. L. (1998), “Radar interferometry and its application to changes in the Earth’s surface,” *Reviews of Geophysics*, 36, 441–500. 33

Monelli, D. and Mai, P. M. (2008), “Bayesian inference of kinematic earthquake rupture parameters through fitting of strong motion data,” *Geophysical Journal International*, 173, 220–232. 38, 41

Nielsen, S. and Madariaga, R. (2003), “On the self-healing fracture mode,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93, 2375–2388. 36

Olson, A. H. and Anderson, J. G. (1988), “Implications of frequency-domain inversion of earthquake ground motions for resolving the space-time dependence of slip on an extended fault,” *Geophysical Journal International*, 94, 443–455. 154

Olson, A. H. and Apsel, R. J. (1982), “Finite faults and inverse theory with applications to the 1979 Imperial Valley earthquake,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72, 1969–2001. ذ, 31, 32, 34, 39, 104

Piegat, A. (2013), *Fuzzy modeling and control*, vol. 69, Physica. 47

Pizzi, A., Di Domenica, A., Gallovič, F., Luzi, L., and Puglia, R. (2017), “Fault Segmentation as Constraint to the Occurrence of the Main Shocks of the 2016 Central Italy Seismic Sequence,” *Tectonics*, 36, 2370–2387. 113, 114, 115, 116, 117, 118, 142, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 162

Premus, J., Gallovič, F., Hanyk, L., and Gabriel, A.-A. (2020), “FD3D_TSN: A Fast and Simple Code for Dynamic Rupture Simulations with GPU Acceleration,” *Seismological Research Letters*, 91, 2881–2889. 3

Presidency Of Counsil Of Ministers-Civil Protection Department (1972), “Italian Strong Motion Network,” . 118

Razafindrakoto, H. N. T., Mai, P. M., Genton, M. G., Zhang, L., and Thingbaijam, K. K. S. (2015), “Quantifying variability in earthquake rupture models using multidimensional scaling: application to the 2011 Tohoku earthquake,” *Geophysical Journal International*, 202, 17–40. 87, 111

Reid, H. F. (1910), “The California Earthquake of April 18, 1906: The Mechanics of the Earthquake/By Harry Fielding Reid,” *Carnegie Inst.* 1

Rezakazemi, M., Dashti, A., Asghari, M., and Shirazian, S. (2017), “H2-selective mixed matrix membranes modeling using ANFIS, PSO-ANFIS, GA-ANFIS,” *International Journal of Hydrogen Energy*, 42, 15211 – 15225. 57

Scognamiglio, L., Tinti, E., Casarotti, E., Pucci, S., Villani, F., Cocco, M., Magnoni, F., Michelini, A., and Dreger, D. (2018), "Complex fault geometry and rupture dynamics of the MW 6.5, 30 October 2016, Central Italy earthquake," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 123, 2943–2964. 115

Serpelloni, E., Anderlini, L., Avallone, A., Cannelli, V., Cavaliere, A., Cheloni, D., D'Ambrosio, C., D'Anastasio, E., Esposito, A., Pietrantonio, G., Pisani, A. R., Anzidei, M., Cecere, G., D'Agostino, N., Mese, S. D., Devoti, R., Galvani, A., Massucci, A., Melini, D., Riguzzi, F., Selvaggi, G., and Sepe, V. (2012), "GPS observations of coseismic deformation following the May 20 and 29, 2012, Emilia seismic events (northern Italy): data, analysis and preliminary models," *Annals of Geophysics*, 55. 118

Smithies, F. (1938), "The eigen-values and singular values of integral equations," *Proceedings of the London mathematical society*, 2, 255–279. 19

Sokos, E. and Zahradník, J. (2013), "Evaluating centroid-moment-tensor uncertainty in the new version of ISOLA software," *Seismological Research Letters*, 84, 656–665. 141, 181

Sokos, E. N. and Zahradnik, J. (2008), "ISOLA a Fortran code and a Matlab GUI to perform multiple-point source inversion of seismic data," *Computers & Geosciences*, 34, 967–977. 181

Somala, S. N., Ampuero, J.-P., and Lapusta, N. (2018), "Finite-fault source inversion using adjoint methods in 3-D heterogeneous media," *Geophysical Journal International*, 214, 402–420. 141

Spudich, P., Cirella, A., Scognamiglio, L., and Tinti, E. (2019), "Variability in synthetic earthquake ground motions caused by source variability and errors in wave propagation models," *Geophysical Journal International*, 219, 346–372. 151

Sugeno, M. and Kang, G. (1988), "Structure identification of fuzzy model," *Fuzzy sets and systems*, 28, 15–33. 48

Takagi, T. and Sugeno, M. (1983), "Derivation of Fuzzy Control Rules from Human Operator's Control Actions," *IFAC Proceedings Volumes*, 16, 55 – 60, iFAC Symposium on Fuzzy Information, Knowledge Representation and Decision Analysis, Marseille, France, 19-21 July, 1983. 44, 48

Tarantola, A. (2004), "Inverse Problem Theory and Methods for Model Estimation," . 30

Tinti, E., Fukuyama, E., Piatanesi, A., and Cocco, M. (2005), “A Kinematic Source-Time Function Compatible with Earthquake Dynamics,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 95, 1211–1223. 36, 37, 149

Tinti, E., Scognamiglio, L., Michelini, A., and Cocco, M. (2016), “Slip heterogeneity and directivity of the ML 6.0, 2016, Amatrice earthquake estimated with rapid finite-fault inversion,” *Geophysical Research Letters*, 43, 10,745–10,752. 113, 114, 141, 144

Tung, S. and Masterlark, T. (2018), “Resolving Source Geometry of the 24 August 2016 Amatrice, Central Italy, Earthquake from InSAR Data and 3D Finite-Element Modeling,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 108, 553–572. 115

Twardzik, C., Madariaga, R., Das, S., and Custódio, S. (2012), “Robust features of the source process for the 2004 Parkfield, California, earthquake from strong-motion seismograms,” *Geophysical Journal International*, 191, 1245–1254. 34

Vallée, M. and Bouchon, M. (2004), “Imaging coseismic rupture in far field by slip patches,” *Geophysical Journal International*, 156, 615–630. 34, 35

van den Ende, M. P. A., Scuderi, M. M., Cappa, F., and Ampuero, J.-P. (2020), “Extracting microphysical fault friction parameters from laboratory and field injection experiments,” *Solid Earth*, 11, 2245–2256. 3

Walters, R., Gregory, L., Wedmore, L., Craig, T., McCaffrey, K., Wilkinson, M., Chen, J., Li, Z., Elliott, J., Goodall, H., Iezzi, F., Livio, F., Michetti, A., Roberts, G., and Vittori, E. (2018), “Dual control of fault intersections on stop-start rupture in the 2016 Central Italy seismic sequence,” *Earth and Planetary Science Letters*, 500, 1 – 14. 114

Wang, L. . (1992), “Fuzzy systems are universal approximators,” in *[1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1163–1170. 44, 56

Wang, L.-X. and Mendel, J. M. (1992), “Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning,” *IEEE transactions on Neural Networks*, 3, 807–814. 44, 56

Y, T. (1979), “AN APPROACH TO FUZZY REASONING METHOD,” . 48

Zadeh, L. A. and Aliev, R. A. (2018), *Fuzzy logic theory and applications: part I and part II*, World Scientific Publishing. 47

Zahradník, J. and Custódio, S. (2012), “Moment tensor resolvability: Application to southwest Iberia,” *Bulletin of the Seismological Society of America*, 102, 1235–1254. 181

Zumberge, J., Heflin, M., Jefferson, D., Watkins, M., and Webb, F. (1997), “Precise point positioning for the efficient and robust analysis of GPS data from large networks,” *Journal of geophysical research: solid earth*, 102, 5005–5017. 118

پیوست آ

روش انتگرال‌گیری گاوس

در سرتاسر این رساله، برای انتگرال‌گیری عددی از انتگرال‌های رابطه‌ی مستقیم، همچون رابطه‌ی ۴-۵ از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس یا روش گاوس کوادریچر استفاده کردیم. در این بخش، به طور خلاصه مروری بر این روش انتگرال‌گیری را ارائه می‌نمائیم.

در روش انتگرال‌گیری گاوس، انتگرال پیوسته به یک حاصل جمع وزن‌دار از انتگرالده در **نقاط گاوسی** داخل هر المان تبدیل می‌شوند:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx = \int_{\epsilon=-۱}^{+۱} f(x(\epsilon))J(x;\epsilon)d\epsilon \approx \sum_{i=۱}^{M} f(\epsilon_i)w_i J(x;\epsilon_i) \qquad (\text{آ-۱})$$

که در آن M تعداد نقاط گاوسی داخل المان انتگرال‌گیری، ϵ_i مختصات نقاط گاوسی، و w_i وزن نقاط گاوسی است. نقاط گاوسی در محدوده‌ی $-۱ \leq \epsilon < ۱$ در داخل حوزه‌ی انتگرال‌گیری تبدیل می‌شوند. توجه کنید که تغییر مختصات، از مختصات فیزیکی (x) به مختصات انتگرال‌گیری ($-۱ \leq \epsilon < ۱$) – که مختصات طبیعی نیز خوانده می‌شود – توسط ژاکوبین $J(x;\epsilon_i)$ صورت می‌پذیرد. در انتگرال‌گیری یک بُعدی $J(x;\epsilon_i)$ برابر $dx/d\epsilon$ در $\epsilon = \epsilon_i$ است.

روند انتگرال‌گیری در مختصات دوبعدی، به شرط آنکه تبدیل یک به یک میان مختصات فیزیکی (x, y) و مختصات طبیعی (ϵ, δ) وجود داشته باشد به نحوی که $x = x(\epsilon, \delta)$ و $y = y(\epsilon, \delta)$، برای $-۱ \leq \epsilon < ۱$،

$1 < \delta \leq 1-$، و $x, y \in \Gamma$، مشابه انتگرال‌گیری یک بُعدی است.

$$\begin{aligned}\iint_{x,y\in\Gamma} f(x,y)dxdy &= \int_{\epsilon=-1}^{+1}\int_{\delta=-1}^{+1} f(x(\epsilon,\delta),y(\epsilon,\delta))J(x,y;\epsilon,\delta)d\epsilon d\delta \\ &\approx \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} f(\epsilon_i,\delta_j)w_i w_j J(x,y;\epsilon_i,\delta_j)\end{aligned} \tag{آ-۲}$$

که در آن M تعداد نقاط گاوسی در امتداد ϵ (امتداد گسل)، N تعداد نقاط گاوسی در امتداد δ (شیب گسل) می‌باشد و جزء مساحت $dxdy$ با $J(x,y;\epsilon,\delta)d\epsilon d\delta$ جایگزین می‌شود. دقت روش انتگرال‌گیری گاوس به طور مستقیم با تعداد نقاط انتگرال‌گیری، M و N ارتباط دارند و هر اندازه از تعداد نقاط انتگرال‌گیری بیشتری استفاده نمائیم، حاصل انتگرال‌گیری دقیق‌تر خواهد شد.

پیوست ب

نکات مهم در محاسبات تانسور ممان

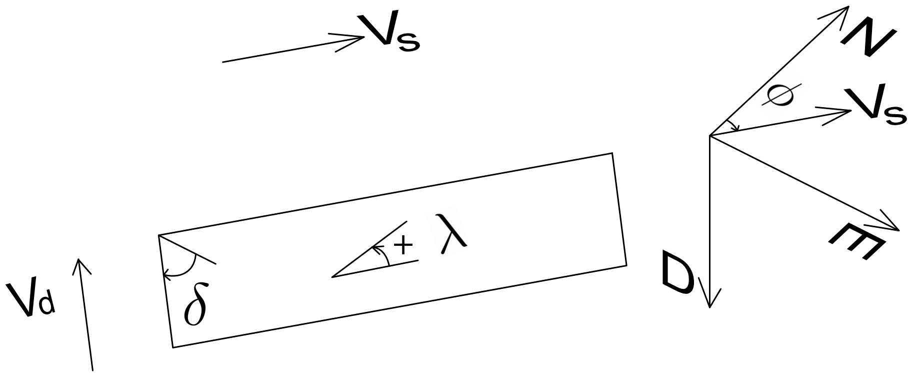
در مهندسی و علوم با تانسورهای متعددی آشنا هستیم و تانسورهای تنش و کرنش را از مکانیک محیط‌های پیوسته[1] به خاطر می‌آوریم. تانسورها را می‌توان در دستگاه‌های مختصات مختلفی نوشت. در زلزله‌شناسی، به طور سنتی از دستگاه مختصاتی که محورهای آن توسط آکی و ریچاردز [۲۰۰۲][2] نامگذاری شده است استفاده می‌شود [بنگرید به جعبه‌ی ۴.۴ در آکی و ریچاردز، ۲۰۰۲]. در این قرارداد علامت، امتداد جغرافیایی شمالی-جنوبی محور X نامیده می‌شود و جهت مثبت آن به سمت شمال می‌باشد، امتداد جغرافیایی شرقی-غربی محور Y نامیده می‌شود و جهت مثبت آن به سمت شرق است و امتداد قائم بر سطح زمین محور Z نامیده می‌شود و جهت مثبت آن به سمت پایین است (شکل ب) . بدین ترتیب یک دستگاه مختصات راستگرد برای مولفه‌های تانسور ممان تشکیل شده است.

جدول ب-۱: جهت قرارداد علامت محورهای مختصات کارتزین مطابق با آکی و ریچاردز [۲۰۰۲].

اندیس محور	نام محور	امتداد جغرافیایی	جهت مثبت
۱	X	N–S	شمال
۲	Y	E–W	شرق
۳	Z	U–D	پائین

برای مشخص کردن امتداد صفحه‌ی لغزش، شیب صفحه‌ی لغزش و جهت بردار لغزش، از ۳ زاویه‌ی امتداد ϕ، شیب δ و لغزش λ استفاده می‌شود. جهت جلوگیری از سردرگمی در تعریف این زوایا، به نکات زیر توجه نمایید.

[1] Continuum mechanics
[2] Aki axis convention



شکل ب-۱: قرارداد علامت محورهای مختصات و زوایای امتداد ϕ، شیب δ و لغزش λ . به امتداد مثبت بردارهای یکّه‌ی امتداد $\mathbf{v}_s$ و شیب $\mathbf{v}_d$ دقت کنید.

- به تعاریف فرادیواره[۳] و فرودیواره[۴] دقت کنید، فرادیواره و فرودیواره برای متمایز نمودن دو سمت صفحه‌ی گسل به کار می‌روند. فرادیواره، بلوکی است که بالایِ صفحه‌ی گسل قرار می‌گیرد، در حالی که فرودیوارده به بلوکی که زیرِ صفحه‌ی گسل قرار دارد گفته می‌شود.

- برای تعریف زاویه‌ی شیب، دو امکان وجود دارد: یکی با استفاده از یک زاویه‌ی حادّه $۰ \leq \delta \leq ۹۰$ و دیگری با استفاده از یک زاویه منفرجه $۹۰ \leq \delta \leq ۱۸۰$، برای زاویه‌ی شیب همواره از زاویه‌ی حادّه استفاده می‌کنیم.

- زاویه‌ی امتداد، زاویه‌ی میان جهت شمال و بردارِ امتداد گسل $\mathbf{v}_s$، در جهت عقربه‌های ساعت است. این بردار به نحوی انتخاب می‌گردد که اگر در جهت آن بایستیم، زاویه‌ی شیب گسل (زاویه‌ی حادّه) منطبق بر جهت بسته شدن انگشتان دست راست باشد. تعریف معادل این است که اگر در جهت زاویه‌ی امتداد بر روی فرودیواره بایستیم، تصویر افقی صفحه‌ی گسل روی زمین در سمت راستمان قرار بگیرد.

- زاویه‌ی لغزش، زاویه‌ی میان بردار امتداد گسل $\mathbf{v}_s$ و بردار نابجایی برشی $\mathbf{\Delta u}_r$ بر روی گسل است و جهت مثبت آن در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. بردار نابجایی برشی، $\mathbf{\Delta u}_r$، حرکت فرادیواره نسبت به فرودیواره را نشان می‌دهد.

[3]Hanging wall
[4]Foot wall

(ب) (الف)

شکل ب-۲: وضعیت کلی نابجایی، (الف) امتداد نابجایی در جهت موازی با صفحه‌ی ناپیوستگی (گسل) باشد. (ب) امتداد نابجایی در جهت عمود بر صفحه‌ی ناپیوستگی (گسل) باشد.

ب-۱ حالت کلی نابجایی وتانسور ممان

در حالت کلی، ممکن است نابجایی در امتداد موازی (شکل ب-۲ (الف)) با صفحه‌ی ناپیوستگی، یا عمود (شکل ب-۲ (ب)) بر آن رخ بدهد. زمین‌لرزه‌های تکتونیکی عموماً بر روی چشمه‌های برشی روی می‌دهند (حالت الف)، این وضعیت را در (بخش ب-۳) به طور مفصل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برای به دست آوردن مولفه‌های تانسور ممان برای یک چشمه‌ی نابجایی کلی، بایستی (رابطه‌ی ۱-۶) را بسط بدهیم، برای این منظور، تانسور کشسانی c_{ijpq} را برای یک محیط همگن و همسانگرد در نظر بگیرید (رابطه‌ی ب-۱):

$$c_{ijpq} = K\delta_{ij}\delta_{pq} + \mu(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{pq}) \qquad (\text{ب-۱})$$

که در آن ، K مدول حجمی[۵] و μ مدول برشی[۶] می‌باشد. با جایگذاری (رابطه‌ی ب-۱) در (رابطه‌ی ۱-۶) خواهیم داشت:

$$M_{pq}(\xi,\tau) = (K - \frac{2}{3}\mu)\Delta u_j^f(\xi,\tau)\nu_j\delta_{pq} + \mu(\Delta u_p^f(\xi,\tau)\nu_q + \Delta u_q^f(\xi,\tau)\nu_p) \qquad (\text{ب-۲})$$

از مکانیک محیط‌های پیوسته به‌خاطر داریم که $K - \frac{2}{3}\mu$ برابر با ضریب لامه (Λ) می‌باشد برای صفحه‌ی گسلی

[5] Bulk modulus
[6] Shear modulus

با زاویه‌ی امتداد ϕ و زاویه‌ی شیب δ بردار نرمال بر صفحه برابر با بردار (رابطه‌ی ب-۳) می‌باشد.

$$\nu = \begin{bmatrix} -\sin(\phi)\sin(\delta) \\ \cos(\phi)\sin(\delta) \\ -\cos(\delta) \end{bmatrix} \tag{ب-۳}$$

بردار نابه‌جایی را می‌توان بر حسب بردار سه بردار یکّه‌ی امتداد $\mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}$، بردار یکه‌ی شیب $\mathbf{v}_d = \begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\delta) \\ -\cos(\phi)\cos(\delta) \\ -\sin(\delta) \end{bmatrix}$ و بردار نرمال بر گسل ν (رابطه‌ی ب-۳) به صورت (رابطه‌ی ب-۴) نوشت، یادآوری می‌شود که بردار نرمال بر گسل حاصل ضرب خارجی $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{v}_s \times \mathbf{v}_d$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta u^f}(\xi,\tau) =& \Delta u_s^f \mathbf{v}_s + \Delta u_d^f \mathbf{v}_d + \Delta u_n^f \nu = \\ & \begin{bmatrix} \Delta u_s^f \cos(\phi) + \Delta u_d^f \sin(\phi)\cos(\delta) - \Delta u_n^f \sin(\phi)\sin(\delta) \\ \Delta u_s^f \sin(\phi) - \Delta u_d^f \cos(\phi)\cos(\delta) + \Delta u_n^f \cos(\phi)\sin(\delta) \\ -\Delta u_d^f \sin(\delta) - \Delta u_n^f \cos(\delta) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{ب-۴}$$

که در آن Δu_s^f نابجایی در راستای امتداد، Δu_d^f نابجایی در راستای بالا-شیب و Δu_n^f نابجایی در امتداد عمود بر گسل می‌باشد. در مورد لغزشی که بر روی صفحه‌ی گسل روی می‌دهد Δu_r^f، عموماً یک زاویه‌ی لغزش λ در نظر گرفته می‌شود به نحوی که

$$\begin{aligned} \Delta u_s^f &= \Delta u_r^f \cos(\lambda) \\ \Delta u_d^f &= \Delta u_r^f \sin(\lambda) \end{aligned} \tag{ب-۵}$$

از جایگذاری (روابط ب-۴، ب-۳) در (رابطه‌ی ب-۲) به روابط ب-۶ تا ب-۱۱ برای مؤلفه‌های تانسور

ممان ناشی از یک نابجایی کلی بر روی یک گسل می‌رسیم.

$$M_{11} = \Lambda \Delta u_j^f(\xi,\tau)\nu_j\delta_{11} + \mu(\Delta u_1^f(\xi,\tau)\nu_1 + \Delta u_1^f(\xi,\tau)\nu_1) \quad (\text{ب-۶})$$

$$= -\mu\Delta u_r(\sin(2\phi)\sin(\delta)\cos(\lambda) + \sin^2(\phi)\sin(2\delta)\sin(\lambda)) + u_n(\Lambda + 2\mu\sin^2(\phi)\sin^2(\delta)) \quad (\text{ب-۷})$$

$$M_{12} = +\mu u_r(\cos(2\phi)\sin(\delta)\cos(\lambda) + 0.5\sin(2\phi)\sin(2\delta)\sin(\lambda)) - u_n(\mu\sin(2\phi)\sin^2(\delta)) \quad (\text{ب-۸})$$

$$M_{13} = -\mu u_r(\cos(\phi)\cos(\delta)\cos(\lambda) + \sin(\phi)\cos(2\delta)\sin(\lambda)) + u_n(\mu\sin(\phi)\sin(2\delta)) \quad (\text{ب-۹})$$

$$M_{22} = +\mu u_r(\sin(2\phi)\sin(\delta)\cos(\lambda) - \cos^2(\phi)\sin(2\delta)\sin(\lambda)) + u_n(\Lambda + 2\mu\cos^2(\phi)\sin^2(\delta)) \quad (\text{ب-۱۰})$$

$$M_{23} = -\mu u_r(\sin(\phi)\cos(\delta)\cos(\lambda) - \cos(\phi)\cos(2\delta)\sin(\lambda)) - u_n(\mu\cos(\phi)\sin(2\delta)) \quad (\text{ب-۱۱})$$

$$M_{33} = -\mu u_r(\sin(2\delta)\sin(\lambda)) + u_n(\Lambda + 2\mu\cos^2(\delta)) \quad (\text{ب-۱۲})$$

ب-۲ حل معکوس برای به دست آوردن تانسور ممان

در انتگرال (رابطه‌ی ۱-۷) دیدیم که تغییرمکان سطح زمین $u_n^o(\mathbf{x},t)$ از محاسبه‌ی انتگرال پیچشِ تانسور ممان $M_{pq}(\xi,\tau)$ و مشتق مکانی تابع گرین $\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},t-\tau;\xi,0)$ بر روی سطح گسل Γ به دست می‌آید. در مواردی که بزرگای زلزله کم باشد (عموماً $M < 5.0$) یا در فواصل دور از چشمه‌ی لرزه‌زا باشیم، به نحوی که بتوان از ابعاد چشمه (Γ) صرف نظر کرده و آن را به صورت یک نقطه در محل (ξ_0) فرض کرد، در این صورت (رابطه‌ی ۱-۷) به شکل زیر در می‌آید.

$$u_n^o(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_{pq}(\xi_0,\tau)\frac{\partial}{\partial(\xi_q)}G_{np}(\mathbf{x},t-\tau;\xi_0,0)d\tau \quad (\text{ب-۱۳})$$

و یا به طور خلاصه

$$u_n^o(\mathbf{x},t) = M_{pq}(\xi_0,t) * G_{np,q}(\mathbf{x},t;\xi_0,0) \quad (\text{ب-۱۴})$$

با استفاده از (روابط ب-۱۳ یا ب-۱۴) می‌توان ممان یک زلزله را با استفاده از تکنیک حل معکوس به دست آورد. برای این منظور، از روش‌های متعددی همچون روش‌های حل معکوس خطی با استفاده از روش منظم‌سازی

تیخونوف (بخش ۲-۹-۱) یا روش‌های حل معکوس بیزی[۷] بهره جست. به تانسور ممان لرزه‌ای که از این طریق به دست می‌آید، تانسور ممان چشمه‌ی نقطه‌ای[۸] گفته می‌شود. تانسور ممان نه فقط در مورد فیزیک چشمه‌های زمین‌لرزه اطلاعات مفیدی ارائه می‌دهد، بلکه در مورد حوادث لرزه‌ای دیگر همچون انفجار، مکش ، سنگ‌ریزش[۹]، زمین‌لغزش[۱۰]، انفجار شهاب‌سنگ‌ها داخل جو و شکست پوسته در اثر تزریق مایعات و گازها مشخصات مکانیکی را ارائه خواهد کرد [زاهارادنیک و کوشتودیو، ۲۰۱۲؛ دام و کروگر، ۲۰۱۴]. امروزه حل معکوس تانسور ممان توسط مراکز لرزه‌نگاری بین‌المللی همچون USGS (https://earthquake.usgs.gov/earthquakes/) و GEOFON (https://geofon.gfz-potsdam.de/) ارائه می‌گردد. مهمترین وبسایتی که به صورت تخصصی به ارائه‌ی تانسور ممان می‌پردازد، CMT Global (https://www.globalcmt.org/) [Global، ۲۰۱۰] است که برای تمامی زمین‌لرزه‌های بزرگتر از ۵.۵ در سرتاسر جهان، حل تانسور ممان را ارائه می‌دهد. برای محاسبه‌ی تانسور ممان نرم‌افزارهای زیادی وجود دارد که از میان آن‌ها می‌توان به ISOLA [سوکوس و زاهارادنیک، ۲۰۰۸، ۲۰۱۳] ، KIWI [سسکا و همکاران، ۲۰۱۰؛ سسکا و هیمن، ۲۰۱۳] و grond [هیمن و همکاران، ۲۰۱۸] اشاره کرد. پارامتری کردن تابع ممان در زمان ممکن است بصورت یک ضربه‌ی واحد یا به صورت مجموعه‌ای متوالی از ضربه‌های واحد، یا توابع زمان منبع گوناگون صورت پذیرد. در مورد بسط در زمان در بخش ۲-۱۰-۲ اطلاعات تکمیلی ارائه می‌گردد.

ب-۳ ساز و کار کانونی

چنانچه تانسور ممان یک زمین‌لرزه را داشته باشیم، می‌توانیم ساز و کار کانونی[۱۱] آن را به دست بیاوریم. ساز و کار کانونی زمین‌لرزه به مجموعه‌ی زوایای امتداد[۱۲] (ϕ)، شیب [۱۳] (δ) و لغزش[۱۴] (λ) گفته می‌شود. چنانچه در یک چشمه‌ی لرزه‌زا، نابجاییِ برشی به اندازه‌ی d بر روی سطحی با مساحت A با مدول برشی (ضریب اصطکاک) μ رخ بدهد، و نابجایی در امتداد عمود بر صفحه‌ی گسل نداشته باشیم، ۶ مولفه‌ی تانسور ممان به شکل رابطه‌ی (زیر) خواهد بود [جعبه‌ی ۴.۴ آکی و ریچاردز، ۲۰۰۲].

[7] Bayesian inversion
[8] Point source moment tensor
[9] Rockfall
[10] Landslide
[11] Focal mechanism
[12] Strike
[13] Dip
[14] Rake

$$M_{xx} = -\; M_{\circ}(\sin(\delta)\cos(\lambda)\sin(۲\phi) + \sin(۲\delta)\sin(\lambda)\sin^{۲}(\phi)) \quad \text{(ب-۱۵)}$$

$$M_{xy} = +\; M_{\circ}(\sin(\delta)\cos(\lambda)\cos(۲\phi) + \frac{۱}{۲}\sin(۲\delta)\sin(\lambda)\sin(۲\phi)) \quad \text{(ب-۱۶)}$$

$$M_{xz} = -\; M_{\circ}(\cos(\delta)\cos(\lambda)\cos(\phi) + \cos(۲\delta)\sin(\lambda)\sin(\phi)) \quad \text{(ب-۱۷)}$$

$$M_{yy} = +\; M_{\circ}(\sin(\delta)\cos(\lambda)\sin(۲\phi) - \sin(۲\delta)\sin(\lambda)\cos^{۲}(\phi)) \quad \text{(ب-۱۸)}$$

$$M_{yz} = -\; M_{\circ}(\cos(\delta)\cos(\lambda)\sin(\phi) - \cos(۲\delta)\sin(\lambda)\cos(\phi)) \quad \text{(ب-۱۹)}$$

$$M_{zz} = +\; M_{\circ}(+\sin(۲\delta)\sin(\lambda)) \quad \text{(ب-۲۰)}$$

که در آن $M_{\circ} = \mu Ad$ بیانگر ممان زلزله می‌باشد. لازم به ذکر است که این روابط همان روابط ب-۶ تا ب-۱۱ با صرف نظر از نابجایی عمود بر صفحه گسل هستند. به این چشمه‌ی لرزه‌زا که نابجائی در به صورت لغزش دو صفحه بر روی هم می‌باشد، چشمه‌ی برشی گفته می‌شود. در حل معکوس برای به دست آوردن ساز و کار کانونی، مولفه‌های ممان به‌دست آمده از (روابط ب-۱۵ تا ب-۲۰) را در (رابطه‌ی ب-۱۳) جایگزین نموده و به جستجوی زوایای δ، ϕ، λ و بزرگای $M_{\circ}$ می‌گردیم، به نحوی که تابع هزینه‌ی[15] $C(M_{\circ}, \phi, \delta, \lambda)$ کمینه شود. در اینجا باید گفته شود که همواره دو دسته جواب برای زوایای δ، ϕ، λ وجود دارد، به نحوی که این دو جواب، عیناً به یک تانسور ممان و تابع هزینه ختم می‌شوند.

[15] Cost function

Abstract:

Kinematic source inversion is used to image the complexities such as nucleation, growth and stop of the earthquake rupture. The earthquake's kinematic source inversion is an ill-posed problem due to two main factors: 1) The forward equation is discretized from a Fredholm integral equation of the first kind, therefore it is inherently ill-posed. 2) The number of observations is usually less than sought for parameters, therefore the problem is substantially under-determined. Small singular values intensify the effect of data noise in the model parameters in this situation, hence a proper technique for controlling their destabilising effect is required. In this dissertation, we propose using the adaptive neuro-fuzzy function approximation, in particular ANFIS to expand the model-space. Using this procedure, we can represent the model-space using only a few basis functions. This procedure allows reducing the number of small singular values, reproducing a better posed discrete inverse problem. The best model is found by training the ANFIS parameters using a neural network. We discuss how the number of model parameters can be decreased while keeping the inversion stable and achieving an adequate resolution. Additionally, we propose a maximum-likelihood analysis of the model misfit to selects a sufficient number of basis functions for each frequency. This inversion procedure is synthetically tested using the SIV-inv1 community benchmark. Besides, a real-data study has been presented for the source study of the Mw 6.2 24/August/2016 Amatrice earthquake. Three datasets including static GNSS ($f = 0$ Hz), high-rate GNSS ($0 < f \leq 0.06$ Hz), and strong-motion ($0.06 < f \leq 0.5$ Hz) are inverted to infer the source kinematics in the respective frequencies. The inverted source model has been compared with previous well-known studies.

Keywords: Seismic Source Inversion, Rank-deficiency and Ill-posedness, Fuzzy Logic, Neural Network, Regularization

International Institute of
Earthquake Engineering and Seismology

International Institute of Earthquake Engineering and Seismology (IIEES)
Seismological Research Center

Development Of A New Seismic Source Inversion Approach To Reduce The Size Of Model Null-space

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirement for the Degree of Doctor of Philosophy in Earthquake Seismology

By:

Navid Kheirdast

Supervisor:

Dr. Anooshiravan Ansari

Advisor:

Dr. Ehsan Karkooti

September 2021