حل اساسی میدان موج در محیط بی‌نهایت و به دست آوردن حل استوکس

نوید خیردست
پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله

۲۷ خرداد ۱۴۰۰

۱ مقدمه

در این بخش، جواب معادله‌ی دیفرانسیل ناویه را در محیط بی‌نهایت همگن به دست می‌آوریم.

۲ معادله‌ی ناویه

رابطه‌ی نیرو-تغییر شکل در یک جامد الاستیک توسط معادله‌ی دیفرانسیل ناویه بیان می‌شود.

معادله‌ی ناویه چنانچه تغییر شکل در یک جامد الاستیک خطی همگن و همسانگرد، با ضریب لامه‌ی λ و مدول برشی μ، توسط میدان برداری $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ نمایش داده شده و به این جسم الاستیک نیروی حجمی $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ وارد گردد، معادله‌ی دیفرانسیل زیر بر تغییر شکل این جسم حاکم خواهد بود.

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) + (\lambda + ۲\mu)\nabla(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) - \mu\nabla\times(\nabla\times\mathbf{u}(\mathbf{x},t)) \qquad (۱)$$

معادله‌ی پیچیده‌ی فوق را با استفاده از تجزیه‌ی هوشمندانه‌ی هلم‌هولتز، می‌توان به معادلات دیفرانسیل ساده و قابل حل تبدیل کرد.

۳ تجزیه‌ی هلم‌هولتز

برای میدان برداری $\mathbf{Z}(\mathrm{x})$ همواره تجزیه‌ی برداری (۲) وجود دارد،

$$\mathbf{Z} = \nabla X + \nabla\times\mathbf{Y} \qquad \text{با} \qquad \nabla\cdot\mathbf{Y} = ۰ \qquad (۲)$$

حالا فرض کنید میدان برداری $\mathbf{Z}(\mathrm{x})$ را به ما بدهند و از ما بخواهند X و $\mathbf{Y}$ را به دست بیاوریم، برای این منظور باید ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل پوآسون (رابطه‌ی ۳) را حل کنیم

$$\nabla^۲\mathbf{W} = \mathbf{Z} \qquad (۳)$$

و سپس از (اتحاد ۴) برای به دست آوردن X و $\mathbf{Y}$ استفاده نماییم.

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{W}}_{X}) - \nabla \times (\underbrace{\nabla \times \mathbf{W}}_{\mathbf{Y}}) \tag{۴}$$

معادله‌ی دیفرانسیل پوآسون یکی از مشهورترین معادلات دیفرانسیل کلاسیک است

$$\nabla^2 \phi = f$$

در میدان سه‌بعدی، حل خصوصی این معادله‌ی دیفرانسیل از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\phi(\mathbf{x}) = -\int\int\int \frac{f(\xi)}{4\pi|\mathbf{x}-\xi|} \mathrm{d}V(\xi) \tag{۵}$$

در حالت خاص، اگر $f = \delta(x)$ باشد، جواب معادله‌ی پوآسون برابر با $\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ یا $\frac{1}{4\pi r}$ است که در آن r فاصله‌ی نقطه‌ی $\mathbf{x}$ تا مبدأ مختصات است.

۴ قضیه‌ی لامه

اگر $\mathbf{u}$ معادله‌ی ناویه (۱) را ارضا نماید، در صورتیکه که برای نیروی حجمی $\mathbf{f}$، مقدار اولیه‌ی $\mathbf{u}(\mathbf{x},0)$، و مشتق زمانی آن، $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0)$، تجزیه‌ی هلم‌هولتز به شکل زیر موجود باشد:

$$\mathbf{f} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \qquad \text{با} \qquad \nabla \cdot \Psi = 0 \tag{۶}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \nabla \mathrm{A} + \nabla \times \mathrm{B} \qquad \text{با} \qquad \nabla \cdot \mathrm{B} = 0 \tag{۷}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \nabla \mathrm{C} + \nabla \times \mathrm{D} \qquad \text{با} \qquad \nabla \cdot \mathrm{D} = 0 \tag{۸}$$

آنگاه، ϕ و ψ وجود دارند به نحوی که

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \qquad \nabla \cdot \psi = 0 \tag{۹}$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi \qquad \alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \tag{۱۰}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\Psi}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \psi \qquad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{۱۱}$$

گام اول حل معادله‌ی دیفرانسیل بالا تجزیه‌ی نیروی حجمی $\mathbf{f}$ و یافتن توابع پتانسیل Φ و Ψ است، به عنوان ساده‌ترین حل فرض کنید نیروی f_i، نیروی واحد در جهت $\mathbf{e}_1$ در مبدأ مختصات است.

$$\mathbf{f} = X_0(t)\delta(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 \tag{۱۲}$$

برویم ϕ و ψ را با استفاده از جواب معادله‌ی پوآسون (۵) به دست بیاوریم. حل معادله دیفرانسیل $\nabla^2\mathbf{W} = X_0(t)\delta(\mathbf{x})\mathbf{e}_1$ به صورت زیر است:

$$\mathbf{W} = -\frac{X_0(t)}{4\pi}\int\frac{\delta(\xi)}{|\mathbf{x}-\xi|}\mathrm{d}\xi\mathbf{e}_1 = -\frac{X_0(t)}{4\pi r}\mathbf{e}_1 \tag{۱۳}$$

حالا با محاسبه‌ی $\nabla\cdot\mathbf{W}$ و $-\nabla\times\mathbf{W}$ می‌توانیم ϕ و ψ را محاسبه کنیم. از آنالیز تانسورها یادآوری می‌شود که $\nabla\times\mathbf{W} = -\epsilon_{i1k}W_{1,k}\mathbf{e}_i$ می‌باشد.

$$\phi = \nabla\cdot\mathbf{W} = -\frac{X_0(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{r}) \tag{۱۴}$$

$$\psi = -\nabla\times\mathbf{W} = \epsilon_{i1k}W_{1,k}\mathbf{e}_i = -(\epsilon_{213}(\frac{1}{r})_{,3}\mathbf{e}_2 + \epsilon_{312}(\frac{1}{r})_{,2}\mathbf{e}_3)\frac{X_0(t)}{4\pi} = (0, \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{1}{r}), -\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{1}{r}))\frac{X_0(t)}{4\pi} \tag{۱۵}$$

۵ یافتن توابع پتانسیل لامه

گام بعدی، یافتن توابع پتانسیل لامه، ϕ و ψ است که از روابط (۱۰، ۱۱) با جایگذاری توابع پتانسیل محاسبه شده در (روابط ۱۴ و ۱۵) به معادلات دیفرانسیل انتشار موج منجر می‌شود:

$$\ddot{\phi} = -\frac{X_0(t)}{4\rho\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{r}) + \alpha^2\nabla^2\phi \tag{۱۶}$$

$$\ddot{\psi}_i = -\frac{X_0(t)}{4\rho\pi}\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,k}\mathbf{e}_i + \beta^2\nabla^2\psi_i \tag{۱۷}$$

با توجه به همگن و همسانگرد بودن محیط و اعمال شدن بار نقطه‌ای در مبدأ مختصات، جواب معادله دارای تقادن کروی خواهد بود. به عبارت دیگر، اگر فرض کنیم در حالت کلی در دستگاه مختصات کروی، $\phi = \phi(r,\varphi,\theta)$ باشد، با توجه به تقارن کروی فقط تابعی از r خواهد بود، بنابراین چنانچه عملگر لاپلاسین (∇^2) را در دستگاه مختصات کروی بنویسیم، برابر است با:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)$$

با جایگذاری اخیر، معادلات انتشار موج (۱۶ و ۱۷) به شکل زیر در می‌آیند.

$$r\ddot{\phi} = -\frac{rX_0(t)}{4\rho\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{1}{r}) + \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) \tag{۱۸}$$

$$r\ddot{\psi}_i = -\frac{rX_0(t)}{4\rho\pi}\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,k}\mathbf{e}_i + \beta^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi_i) \tag{۱۹}$$

برای یافتن جواب معادلات فوق بیایید ابتدا جواب خصوصی برای معادله موج ناهمگن (رابطه‌ی زیر) را پیدا کنیم.

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = p(t)$$

جواب خصوصی معادله‌ی دیفرانسیلی فوق برابر است با [بنگرید به معادله‌ی 3.88 در آخن‌باخ، ۱۹۷۴] :

$$u(x,t) = -\int_0^{x/c}\tau p(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{۲۰}$$

بیایید معادلات (۱۹ و ۱۸) را بار دیگر مرتب کنیم،

$$\alpha^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}(r\phi)-\frac{\partial}{\partial t^{2}}(r\phi)=\frac{rX_{0}(t)}{4\rho\pi}\frac{\partial}{\partial x_{1}}(\frac{1}{r}) \tag{۲۱}$$

$$\beta^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}(r\psi_{i})-\frac{\partial}{\partial t^{2}}(r\psi_{i})=\frac{rX_{0}(t)}{4\rho\pi}\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,k}\mathbf{e}_{i} \tag{۲۲}$$

بنابراین جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل (۲۲ و ۲۱) برابر می‌شود با:

$$\phi=-\frac{1}{4\rho\pi}\frac{\partial}{\partial x_{1}}(\frac{1}{r})\int_{0}^{r/\alpha}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{۲۳}$$

$$\psi_{i}=-\frac{1}{4\rho\pi}\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,k}\mathbf{e}_{i}\int_{0}^{r/\beta}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{۲۴}$$

با جایگذاری جوابهای فوق در (۹) می‌توان جواب خصوصی معادله‌ی انتشار موج را به دست آورد.

$$\nabla\phi=-\frac{1}{4\rho\pi}\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{1}}(\frac{1}{r})\int_{0}^{r/\alpha}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)=-\frac{1}{4\rho\pi}\left\{\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x_{i}\partial x_{1}}(\frac{1}{r})\int_{0}^{r/\alpha}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\frac{\partial}{\partial x_{1}}(\frac{1}{r})\frac{1}{\alpha}\frac{\partial r}{\partial x_{i}}\frac{r}{\alpha}X_{0}(t-\frac{r}{\alpha})\right\}$$

و

$$\nabla\times\psi=-\epsilon_{min}\psi_{i,n}\mathbf{e}_{m}=(\frac{1}{4\rho\pi})\epsilon_{min}\frac{\partial}{\partial x_{n}}\left(\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,k}\int_{0}^{r/\beta}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathbf{e}_{m}=$$
$$(\frac{1}{4\rho\pi})\left(\epsilon_{min}\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,kn}\int_{0}^{r/\beta}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau+\epsilon_{i1k}(\frac{1}{r})_{,k}\epsilon_{min}\frac{\partial r}{\partial x_{n}}\frac{1}{\beta}\frac{r}{\beta}X_{0}(t-\frac{r}{\beta})\right)\mathbf{e}_{m}$$

دقت کنید $\epsilon_{min}\epsilon_{i1k}=\delta_{n1}\delta_{mk}-\delta_{nk}\delta_{m1}$ (چرا؟)

$$\nabla\times\psi=(\frac{1}{4\rho\pi})\left\{\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x_{m}\partial x_{1}}(\frac{1}{r})-\frac{\partial^{2}}{\partial x_{n}\partial x_{n}}(\frac{1}{r})\delta_{m1}\right)\int_{0}^{r/\beta}\tau X_{0}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial x_{m}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{1}}-\frac{\partial}{\partial x_{n}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{n}}\delta_{m1}\right)\frac{r}{\beta^{2}}X_{0}(t-\frac{r}{\beta})\right\}\mathbf{e}_{m} \tag{۲۵}$$

دقت کنید که $\frac{\partial r}{\partial x_i}$ کسینوس هادی خط متصل کننده‌ی مبدأ به نقطه‌ی مشاهده است و آن را با γ_i نمایش می‌دهیم. همچنین $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{r})=\frac{-\gamma_i}{r^2}$ بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial x_{m}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{1}}=\frac{-\gamma_{1}\gamma_{m}}{r^{2}} \tag{۲۶}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{n}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{n}}=\frac{-\gamma_{n}\gamma_{n}}{r^{2}}=\frac{-1}{r^{2}} \tag{۲۷}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{m}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{1}}-\frac{\partial}{\partial x_{n}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{n}}\delta_{m1}\right)=\frac{\delta_{m1}-\gamma_{1}\gamma_{m}}{r^{2}} \tag{۲۸}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{1}}(\frac{1}{r})\frac{\partial r}{\partial x_{i}}=\frac{-\gamma_{1}\gamma_{i}}{r^{2}} \tag{۲۹}$$

از جواب معادله‌ی دیفرانسیل پوآسون (۵) یادآوری می‌شود که:

$$-(\frac{1}{4\rho\pi})\frac{\partial^{2}}{\partial x_{n}\partial x_{n}}(\frac{1}{r})=\delta(r)$$

بنابراین جمله‌ی دوم رابطه‌ی (۲۵) در $r\neq 0$ برابر صفر خواهد بود. یعنی این جمله در خارج از مبدأ اثری ندارد.

$$u_i(r,t) = (\frac{1}{4\rho\pi})\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_1}(\frac{1}{r})\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right) + (\frac{1}{4\rho\pi})(\frac{\gamma_1\gamma_i}{r^2})\frac{r}{\alpha^2}X_0(t-\frac{r}{\alpha}) + (\frac{1}{4\rho\pi})\frac{\delta_{m1}-\gamma_1\gamma_m}{r^2}\frac{r}{\beta^2}X_0(t-\frac{r}{\beta}) \qquad r \neq 0$$

همچنین $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_1}(\frac{1}{r}) = \frac{3\gamma_i\gamma_1-\delta_{1i}}{r^3}$ و در نتیجه:

$$u_i(r,t) = (\frac{1}{4\rho\pi})\left(\frac{3\gamma_i\gamma_1-\delta_{1i}}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right) + (\frac{1}{4\rho r\pi\alpha^2})(\gamma_1\gamma_i)X_0(t-\frac{r}{\alpha}) + (\frac{1}{4\rho r\pi\beta^2})(\delta_{m1}-\gamma_1\gamma_m)X_0(t-\frac{r}{\beta}) \qquad r \neq 0 \tag{30}$$

جواب ۳۰ به حل استوکس مشهور است.

مراجع

Achenbach, J. (1974), “Wave propagation in elastic solids,” . 3